

基于序列凸优化的火星上升器机会约束轨迹优化

郭春正¹, 王鹏宇¹, 郭敏文^{2,3}, 黄翔宇^{2,3}, 郭延宁¹

(1. 哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001; 2. 北京控制工程研究所, 北京 100094;
3. 空间智能控制技术全国重点实验室, 北京 100094)

摘要: 火星上升器承担着将火星样品送入空间轨道的任务, 其轨迹优化是火星采样返回任务中的关键一环。火星上升任务情境复杂, 并且受到各类不确定性的影响。然而传统的轨迹优化大多基于标称模型, 对不确定性的应对能力有限。将火星上升器面临的初始位置和推力幅值不确定性描述为机会约束, 建立考虑不确定性的机会约束轨迹优化问题, 并使用序列凸优化方法迭代求解最优轨迹。数值仿真结果证明了所提出方法的有效性, 同时对比表明本文方法的性能指标更优, 且比传统鲁棒优化的保守性更低。另外, 对机会约束的风险管理作用和概率近似函数的保守性进行了对比分析。

关键词: 火星上升器; 轨迹优化; 机会约束; 序列凸优化

中图分类号: V476.4

文献标识码: A

文章编号: 2096-9287(2026)01-0018-09

DOI: 10.3724/j.issn.2096-9287.2025.20250091

引用格式: 郭春正, 王鹏宇, 郭敏文, 等. 基于序列凸优化的火星上升器机会约束轨迹优化[J]. 深空探测学报(中英文), 2026, 13(1): 18-26.

Reference format: GUO C Z, WANG P Y, GUO M W, et al. Chance-constrained trajectory optimization for Mars ascent vehicle based on sequential convex optimization[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2026, 13(1): 18-26.

引言

深空探测指人类对地球以外的天体或空间环境开展的探测活动, 其中火星探测是当前各航天大国的研究热点之一^[1]。中国已成功实现火星环绕、着陆、巡视探测, 后续计划开展火星采样返回任务。此任务中, 火星上升器(Mars Ascent Vehicle, MAV)需要将火星地表样本运送至环火轨道, 并与预先部署的地球返回器交会或完成样本容器的捕获转移^[2], 面临着定位误差、推力波动、大气干扰等问题。其在不确定性下的轨道注入精度对任务成败起到关键作用, 轨道参数偏差将威胁整个任务的顺利开展。同时, 样本运送任务对燃料最优性提出更高要求。

轨迹优化方法分为解析解法和数值解法两大类。解析解法通过数学理论推导轨迹的解析表达式, 理论严谨性强, 精确性高, 便于理解, 但推导过程较为繁琐, 适用范围有限。数值解法更加适用于非线性复杂约束问题, 在航天器轨迹优化研究中使用较多。其核心思想在于将原始轨迹优化问题转化为参数优化问题, 进而借助成熟的参数优化算法求解^[3]。

20世纪90年代, Betts^[4]将数值轨迹优化分为直接法

和间接法, 并梳理了每种方法的核心原理及典型特征。雍恩米^[5]针对轨迹优化方法展开综述性研究, 并总结了常见数值解法的基本原理及其在不同场景下的应用特点。后续研究中, 崔乃刚等^[3]、张友安等^[6]进一步基于直接法与间接法的分类框架对轨迹优化数值方法进行了归纳总结。

间接法不直接对性能指标函数寻优, 而是基于最优控制理论的一阶必要条件, 通过变分学和拉格朗日算子求解哈密顿多点边值问题^[6]。在理想情形下, 间接法能够给出高精度的优化结果, 但其推导过程相对复杂, 并且求解过程对初始猜测值的依赖性较强。直接法直接对性能指标函数进行优化, 利用参数化或离散化方法将最优控制问题转化为非线性规划(NonLinear Programming, NLP)问题, 进而借助成熟的数值求解器获取最优轨迹。相比于间接法, 直接法对初始猜测的依赖性低, 且构造简单、收敛性好、易于程序化。

凸优化作为直接法的重要分支, 具有对初始猜测不敏感的特性, 并且能够在多项式时间复杂度内确保收敛到全局最优解^[3]。序列凸优化(Sequential Convex Programming, SCP)通过迭代求解一系列凸优化子问

题来逼近原问题的解, 其通用性较强, 适于处理复杂约束下的轨迹优化问题。杨奔等^[7]构建了一种基于序列凸优化的再入轨迹优化方法, 并通过数值仿真验证了该方法在求解精度与计算效率方面的优势。Szmuk等^[8]提出一种连续凸化的方法, 针对存在气动阻力和新型非凸控制约束的燃料最优动力着陆问题提出了有效的解决方案。Li等^[9]通过自适应策略改进序列凸优化算法, 成功实现了多阶段火星上升器的快速轨迹优化, 在收敛性和计算时间方面表现出优越性能。

然而, 传统轨迹优化方法大多是在确定性条件下寻找最优解, 并未在优化过程中考虑实际工程中各类不确定因素的影响。为此, 近年来研究者开始关注考虑不确定性的鲁棒轨迹优化, 在优化中引入不确定性, 从而提升结果在统计意义上的稳定性。Marmo^[10]归纳了从确定性问题向随机问题过渡的描述方式, 并探讨了鲁棒轨迹优化的分类要素。江秀强^[11]基于优化目标对鲁棒优化问题进行分类, 并介绍了序贯优化与混合不确定性评估、鲁棒协同优化两类典型的鲁棒优化方法。

机会约束规划 (Chance Constrained Programming, CCP) 是应对不确定性的一种典型方法, 要求随机约束条件至少在一定置信水平下成立, 本质是将传统的确定约束替换为概率约束^[12]。针对概率函数及其导数难以直接计算的问题, 通常使用确定性函数对随机约束进行近似表达。然而这种近似处理将对原始问题的最优性产生影响, 增强问题的保守性。文献^[13]提出 Bernstein 近似方法, 提供了一种一致性的松弛方案以处理随机约束。Zhao等^[14]进一步提出了 Split-Bernstein 方法, 显著降低了近似保守性。文献^[15]提出了一种平滑可微的概率函数替代机会约束, 为概率近似提供了更贴合实际的模型。同时, 这种平滑可微函数形式的机会约束能够更方便地向凸约束进行转化, 可借助成熟的凸优化算法高效求解。

本文的主要创新在于, 使用机会约束描述火星上升过程中的不确定性, 将一种新型的平滑可微概率近似函数与序列凸优化框架结合, 用于求解包含机会约束的火星上升轨迹优化问题, 并通过对比实验证明了该方法在同等风险水平下能够获得燃料更优 (即保守性更低) 的轨迹。后续章节内容安排: 第 1 节对问题建模; 第 2 节对约束条件进行近似和转化; 第 3 节进行数值仿真。

1 问题建模

本文针对两级固定推力火星上升器开展轨迹优化方法研究, 本节对此最优控制问题进行建模。如图 1 所

示, 两级固体 MAV 发射后的具体飞行过程分为上升段、滑行段、入轨段, 目标是到达预定的环火轨道^[9]。其中上升段和入轨段为两个推进段, 上升段第一级燃料燃尽; 入轨段开始时第一级分离, 第二级点火继续推进。后续阐述中使用数字下标区分 3 个不同飞行阶段。本文主要符号及上下标说明如表 1 所示。

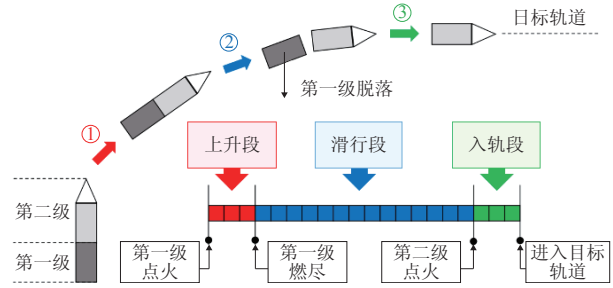


图 1 火星上升器飞行阶段示意图^[9]

Fig. 1 Schematic diagram of flight phases of MAV^[9]

表 1 主要符号/上下标说明

Table 1 Main symbols, superscripts and subscripts notes

符号/上下标	含义	符号/上下标	含义
x	状态	μ	随机变量均值
r	位置矢量/m	σ	随机变量标准差
v	速度矢量/($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	ε	机会约束置信概率
m	质量/kg	γ	机会约束最大允许误差
t	时间/s	$P(\cdot)$	概率
τ	离散化时间因子	$E(\cdot)$	期望
u	推力方向矢量	$f(x, u)$	动力学方程
T	推力大小/N	$\varphi[x(t_f)]$	终端约束
D	气动阻力大小/N	χ	近似函数自变量
V_{rel}	相对速度/($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	ψ	近似阶跃函数
ρ	大气密度/($\text{kg}\cdot\text{s}^{-3}$)	α	近似函数参数
g	重力加速度 ($\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$)	vio	实际违反率
R	行星半径/m	δ	信赖域约束半径
GM_m	火星引力常数/($\text{m}^3\cdot\text{s}^{-2}$)	上标“ n ”	第 n 次迭代
I_{sp}	发动机比冲/s	下标“0”	初始位置
L	角动量方向矢量	下标“ f ”	终端位置
a	轨道半长轴/m	下标“1”“2”“3”	区分不同飞行阶段
e	轨道偏心率/($^\circ$)	下标“*”	上一次迭代结果
i	轨道倾角/($^\circ$)	下标“ref”	给定参考值
Ω	升交点赤经/($^\circ$)	下标“e”	地球参数
J	性能指标	下标“m”	火星参数
ξ	随机变量		

MAV 的上升过程涉及多种不确定性, 如初始定位的不确定性、推力幅值的随机波动、火星大气的随机干扰、火星自转误差等。其中, 初始位置和推力幅值的不确定性直接影响优化程序中相应的初始位置约束和推力幅值约束, 其机会约束的构造更加方便, 对结果的影响更加直观, 易于理解, 因此本文考虑初始位置和推力幅值的不确定性。其余不确定性若可借助随

机变量进行表征, 并且确定所研究的约束与不确定性源之间的关系, 则可作类似扩展。其中不确定性源的影响机理建模是扩展的难点所在。

1.1 目标函数

由于火星上升器的主要任务是转移所采集的火星样品, 因此上升轨迹的优化目标为尽可能提高可搭载样品质量。除样品以外, 上升器的质量组成还包括系统干重及燃料质量。其中系统干重由机械结构、敏感器、执行机构等多种因素决定, 不能轻易削减, 因此选取燃料最优策略, 以最小化燃料消耗为目标, 从而为样品提供更大的质量空间。即

$$J = -m_{f,3} \quad (1)$$

其中, $m_{f,3}$ 表示第三阶段结束时火星上升器的质量。

1.2 约束条件

火星上升器建模为质点, 受三自由度平动控制。其位置向量 $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$ 、速度向量 $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$ 和质量 m 共同组成状态向量 \mathbf{x} ; 控制输入为推力方向矢量 \mathbf{u} 。火星大气稀薄, 密度约为地球的1%, 气动升力忽略不计。假设MAV飞行过程中仅受到火星万有引力、气动阻力以及可控推力的作用。考虑力的方向, 整理得到动力学约束, 如式(2)所示

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}(t) = -\frac{GM_m}{r^2 \|\mathbf{r}\|} \mathbf{r} + \frac{T}{m} \mathbf{u} - \frac{D}{m \|\mathbf{V}_{rel}\|} \mathbf{V}_{rel} \\ \dot{m} = -\frac{T}{I_{sp} g_e} \end{cases} \quad (2)$$

其中: GM_m 为火星引力常数; T 为推力大小; D 为气动阻力大小; I_{sp} 为发动机比冲; g_e 为地球标准重力加速度大小; \mathbf{V}_{rel} 为上升器相对于火星的速度。 D 和 \mathbf{V}_{rel} 的计算公式如下

$$D = \frac{1}{2} \rho C_D S \|\mathbf{V}_{rel}\|^2 \quad (3)$$

$$\mathbf{V}_{rel} = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}_m \times \mathbf{r} \quad (4)$$

其中: ρ 为当地大气密度, 由公式 $\rho = \rho_0 \exp(-h/h_s)$ 给出^[16], $\rho_0 = 1.58 \times 10^{-2} \text{ kg/m}^3$, 比例高度 $h_s = 9\ 354.5 \text{ m}$; C_D 、 S 分别为MAV的气动阻力系数和参考面积; $\boldsymbol{\omega}_m$ 为火星自转角速度。

MAV最终进入环火轨道, 终端状态需满足严格的轨道要素约束, 包括半长轴、轨道倾角、偏心率、升交点赤经等。当目标轨道为理想圆形时, 终端约束可参照文献[17]表示为

$$\begin{cases} \|\mathbf{r}(t_{f,3})\| - a = 0 \\ \|\mathbf{v}(t_{f,3})\| - \sqrt{GM_m/a} = 0 \\ \mathbf{r}(t_{f,3})^T \mathbf{v}(t_{f,3}) = 0 \\ \mathbf{r}(t_{f,3})^T \mathbf{L} = 0 \\ \mathbf{v}(t_{f,3})^T \mathbf{L} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中: $\mathbf{L} = [\sin \Omega \sin i, -\cos \Omega \sin i, \cos i]^T$ 为目标轨道角动量的单位方向矢量(在火星质心惯性坐标系中定义); a 为轨道半长轴; e 为轨道偏心率; i 为轨道倾角; Ω 为升交点赤经。

由于上升过程分为3个阶段, 因此需要依据实际情况对上升器相邻阶段的状态进行衔接。第二阶段初与第一阶段末位置、速度和质量均保持连续; 而第二阶段向第三阶段过渡时, 虽然位置和速度仍然连续, 但第一级的分离导致质量在第三阶段初发生突变。因此添加连接点约束如下

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t_{0,2}) = \mathbf{x}(t_{f,1}) \\ \mathbf{r}(t_{0,3}) = \mathbf{r}(t_{f,2}) \\ \mathbf{v}(t_{0,3}) = \mathbf{v}(t_{f,2}) \\ m(t_{0,3}) = m(t_{f,2}) - m_1 \end{cases} \quad (6)$$

上升器初始位置约束在确定性轨迹优化问题中的表述为 $\mathbf{r}_0^n = \mathbf{r}_{ref}$, 其中 $\mathbf{r}_{ref} = [x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}]$ 为给定的发射位置坐标, $\mathbf{r}_0^n = [x_0^n, y_0^n, z_0^n]$ 为第 n 次迭代的初始位置。假设三轴初始位置分别受到 ξ_x 、 ξ_y 、 ξ_z 3个随机变量的影响, $\xi_x \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$, $\xi_y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$, $\xi_z \sim N(\mu_z, \sigma_z^2)$, 三轴初始坐标的最大允许误差分别设定为 γ_x 、 γ_y 、 γ_z , 可接受概率阈值分别为 ε_x 、 ε_y 、 ε_z 。则初始位置的机会约束描述如下

$$P\left(\left|\mathbf{r}_0^n(1) - x_{ref} + \xi_x\right| - \gamma_x \leq 0\right) \geq \varepsilon_x \quad (7)$$

$$P\left(\left|\mathbf{r}_0^n(2) - y_{ref} + \xi_y\right| - \gamma_y \leq 0\right) \geq \varepsilon_y \quad (8)$$

$$P\left(\left|\mathbf{r}_0^n(3) - z_{ref} + \xi_z\right| - \gamma_z \leq 0\right) \geq \varepsilon_z \quad (9)$$

本文所研究的两级火星上升器控制约束如式(10)所示。在确定性轨迹优化问题中, 推力幅值 T 以常量形式给出。本文研究第二个推进段、即上升器飞行第三阶段推力幅值 T_3 的不确定性, 记推力幅值标称值为 $T_{3,ref}$, 第 n 次迭代的推力幅值为 T_3^n 。假设随机变量分布 $\xi_T \sim N(\mu_T, \sigma_T^2)$, 最大允许误差为 γ_T , 置信水平为 ε_T , 则推力幅值机会约束表述如式(11)所示。

$$\|\mathbf{u}\| = 1, \mathbf{U} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \quad (10)$$

$$P\left(\left|T_3^n - T_{3,ref} + \xi_T\right| - \gamma_T \leq 0\right) \geq \varepsilon_T \quad (11)$$

至此, 建立起以式 (1) 为目标函数, 以式 (2)、式 (5) ~ (11) 为约束条件的最优控制问题。

2 约束条件的近似与转化

2.1 机会约束的近似

针对概率函数及其导数难以直接计算的问题, 本文借助类似单位阶跃函数的指标函数 $H(F(\xi))$ 将机会约束表述为期望的形式

$$H(F(\xi)) = \begin{cases} 1, & F(\xi) \geq 0 \\ 0, & F(\xi) < 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$P(F(\xi) \leq 0) = 1 - \mathbb{E}(H(F(\xi))) \geq \varepsilon \quad (13)$$

其中: $F(\xi) \geq 0$ 与 $F(\xi) < 0$ 分别表示某个事件成立或不成立; $P(\cdot)$ 表示某个事件发生的概率; $\mathbb{E}(\cdot)$ 表示某个事件发生概率的期望值。

然而, 阶跃函数包含跳跃点, 在原点处不可导, 使得后续机会约束的凸化处理难以进行, 因此需要对阶跃函数进行近似。本文采用文献[18]中提出的平滑可微近似函数替代机会约束, 其具体形式如式 (14) 所示。相比于Bernstein等其他形式近似函数, 此平滑可微近似可以在一定程度上降低保守性。

$$\Psi(\alpha, \chi) = \frac{(\alpha + p)e^{\alpha\chi}}{\alpha e^{\alpha\chi} + qe^{-\alpha\chi}} \quad (14)$$

其中: χ 表示一个事件; $\alpha > 0$ 、 $p \geq q > 0$ 为参数。

当 $p = 1$ 、 $q = 0.5$ 时, α 取不同值对应的 $\Psi(\alpha, \chi)$ 的图像如图 2 所示。由图 2 可见, 随着参数 α 逐渐增大, Ψ 逐渐逼近单位阶跃函数。关于这一点, 文献[18]中给出了理论证明, 因此这里不再赘述。

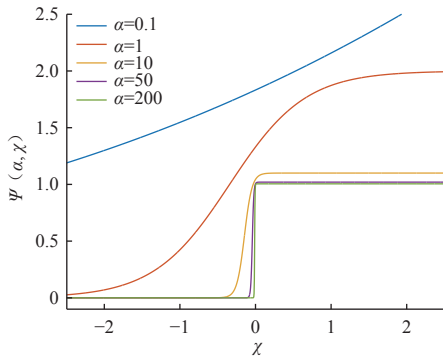


图 2 单位阶跃函数近似图像

Fig. 2 Graph of approximation of Heaviside function

下面以初始位置 x 坐标为例, 对机会约束进行近似。首先, 基于式 (13), 概率约束式 (7) 可表示为式 (15) 所示期望形式; 其次, 如式 (16), 将阶跃函数 H 替换为平滑可微函数 Ψ ; 最后应用马尔可夫链

蒙特卡洛抽样策略 (MCMC)^[19] 求解期望形式问题, 如式 (17), 依据随机变量 ξ_x 所遵循的概率密度函数生成大量样本点 $\{\xi_i\}_1^M$, 从而计算近似的期望值。

$$\mathbb{E}(H(|x_0^n - x_{\text{ref}} + \xi_x| - \gamma_x)) \leq 1 - \varepsilon_x \quad (15)$$

$$\mathbb{E}(\Psi(\alpha, |x_0^n - x_{\text{ref}} + \xi_x| - \gamma_x)) \leq 1 - \varepsilon_x \quad (16)$$

$$\frac{1}{M} \sum_{i \in I_M} \Psi(\alpha, |x_0^n - x_{\text{ref}} + \xi_x| - \gamma_x) \leq 1 - \varepsilon_x \quad (17)$$

其中: M 为样本点的数量; I_M 为样本集。同理, 机会约束式 (8)、(9)、(11) 依照上述流程进行近似

$$\frac{1}{M} \sum_{i \in I_M} \Psi(\alpha, |y_0^n - y_{\text{ref}} + \xi_y| - \gamma_y) \leq 1 - \varepsilon_y \quad (18)$$

$$\frac{1}{M} \sum_{i \in I_M} \Psi(\alpha, |z_0^n - z_{\text{ref}} + \xi_z| - \gamma_z) \leq 1 - \varepsilon_z \quad (19)$$

$$\frac{1}{M} \sum_{i \in I_M} \Psi(\alpha, |T_3^n - T_{3,\text{ref}} + \xi_T| - \gamma_T) \leq 1 - \varepsilon_T \quad (20)$$

2.2 非凸约束的转化

第 1 节建立的最优控制问题包含较多非凸项, 本节将非凸约束转化为凸约束, 从而使其可通过序列凸优化方法求解。

针对形式较为简单的非凸约束, 无损凸化 (松弛) 可以将非凸约束解析等价地转化为简单的凸约束, 其关键在于问题变换前后没有损失。使用无损凸化方法将控制约束式 (10) 中的 $\|\mathbf{u}\| = 1$ 转化为二阶锥凸约束形式

$$\|\mathbf{u}\| \leq 1 \quad (21)$$

针对形式较为复杂、无法进行无损凸化的非凸约束, 如上节最优控制问题中的动力学约束、终端状态约束、机会约束, 可使用连续线性化方法进行近似。连续线性化的核心思想是以局部线性近似来简化复杂非线性系统。该方法基于泰勒级数展开原理, 在给定工作点附近将非线性函数表示为线性增量形式, 从而获得局部线性化模型。

对于动力学约束, 将方程 (2) 记为 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 。基于一阶泰勒展开, $\dot{\mathbf{x}}$ 在给定状态 \mathbf{x}_* 处进行近似线性化, 如式 (22)。对于终端状态约束, 式 (6) 可记为 $\varphi[\mathbf{x}(t_f)] = 0$, 同样采用一阶泰勒展开进行近似, 如式 (23)。

$$\dot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_*, \mathbf{u}_*) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) + \mathbf{B}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_*) \quad (22)$$

$$\varphi[\mathbf{x}(t_f)] \approx \varphi[\mathbf{x}_*(t_f)] + \mathbf{A}_\varphi[\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_*(t_f)] = 0 \quad (23)$$

其中：雅可比矩阵 $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_*, \mathbf{u}=\mathbf{u}_*}$ ， $\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_*, \mathbf{u}=\mathbf{u}_*}$ ， $\mathbf{A}_\varphi = \frac{\partial \varphi[\mathbf{x}(t_f)]}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \Big|_{\mathbf{x}(t_f)=\mathbf{x}_*(t_f)}$ ； \mathbf{x}_* 、 \mathbf{u}_* 分别为上一次迭代产生的状态和控制变量。

需要注意的是，在迭代开始时提供的初始猜测通常并不理想，零终端约束在数值计算时可能不易实现。即使原始问题是可行的，近似子问题可能仍然是不可行的，即出现人为不可行^[20]问题。因此将零约束松弛为不等式约束，如式(24)。同时在目标函数中引入相应惩罚项以保证收敛，如式(25)。

$$|\varphi[\mathbf{x}_*(t_f)] + \mathbf{A}_\varphi(\mathbf{x}_*)[\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_*(t_f)]| \leq \Delta_\varphi \quad (24)$$

$$J = -m_{f,3} + \omega_\varphi \Delta_\varphi \quad (25)$$

对于非凸机会约束(17)~(20)，近似函数 Ψ 的形式较为复杂，因此需要进行与上文类似的线性化处理。下面仍以初始 x 坐标约束(17)为例进行机会约束的转化，约束(18)~(20)采用相同方式处理。记 $|x_0^n - x_{\text{ref}} + \xi_x| - \gamma_x = \chi^n$ ， $|x_0^{n-1} - x_{\text{ref}} + \xi_x| - \gamma_x = \chi^{n-1}$ ，对函数 $\Psi(\alpha, \chi)$ 在 χ^{n-1} 处进行一阶泰勒展开

$$\frac{1}{M} \sum_{i \in I_M} [\Psi(\alpha, \chi^{n-1}) + \mathbf{A}_\Psi(\chi^{n-1})] \leq 1 - \varepsilon_x \quad (26)$$

另外，由于 χ 的定义中包含绝对值运算，上述约束实际上并不是单个约束，而是联合机会约束。依据文献[21]中提出的方法，该联合机会约束可以转化为如下形式进行求解

其中， $\mathbf{A}_\Psi = \frac{\partial \Psi(\alpha, \chi)}{\partial \chi} \Big|_{\chi=\chi^{n-1}}$ 。

$$\begin{cases} \frac{1}{M} \sum_{i \in I_M} [\Psi(\alpha, \chi_1^{n-1}) + \mathbf{A}_\Psi(\chi_1^{n-1})] \leq \varepsilon_{x,1} \\ \frac{1}{M} \sum_{i \in I_M} [\Psi(\alpha, \chi_2^{n-1}) + \mathbf{A}_\Psi(\chi_2^{n-1})] \leq \varepsilon_{x,2} \\ \varepsilon_{x,1} + \varepsilon_{x,2} \leq 1 - \varepsilon_x \end{cases} \quad (27)$$

其中： $\chi_1^n = x_0^n - x_{\text{ref}} + \xi_x - \gamma_x$ ； $\chi_2^n = -(x_0^n - x_{\text{ref}} + \xi_x) - \gamma_x$ ； χ_1^{n-1} 、 χ_2^{n-1} 同理； $\varepsilon_{x,1}$ 、 $\varepsilon_{x,2}$ 被称为分配风险参数，作为新的优化变量。

需要注意的是，当状态变量和控制变量的变化范围较大时，上述一阶泰勒展开的误差可能过大，导致局部线性化不成立。因此，为了确保线性化的有效性，使用式(28)、(29)所示信赖域约束对状态变量和控制变量的变化范围进行限制， δ 称为信赖域约束半径。

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| \leq \delta_x \quad (28)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_*\| \leq \delta_u \quad (29)$$

3 数值仿真

3.1 归一化与离散化

首先，为了消除不同类型数据的数量级差异可能带来的不利影响，位置、速度、时间、力类型的物理量分别使用算子 R_m 、 $\sqrt{R_m g_m}$ 、 $\sqrt{R_m/g_m}$ 、 g_m 进行归一化处理。其中 R_m 为火星半径， g_m 为火星表面重力加速度。

其次，基于公式 $t = [(t_f - t_0)\tau + (t_f + t_0)]/2$ 将实际时间区域转换到高斯离散点区间，其中 t_0 为阶段开始时间， t_f 为阶段结束时间， τ 为离散化时间因子， $\tau \in [-1, 1]$ 。之后基于梯形数值积分将连续动力学方程离散化。

3.2 轨迹优化结果及对比

本文研究的目标轨道参数和机会约束归一化参数分别见表2、表3。使用序列凸优化算法分别迭代求解确定性、传统鲁棒、机会约束轨迹优化问题，得到在确定性及考虑不确定性情况下仍能达到目标轨道的上升轨迹，结果如图3所示。

表2 MAV目标轨道参数

Table 2 Target orbital parameters of MAV	
目标轨道参数	数值
轨道高度/km	300
轨道倾角/(°)	29.5
轨道偏心率	0
升交点赤经/(°)	253.2
近地点幅角/(°)	0

表3 机会约束归一化参数

Table 3 Normalized parameters of chance constraints					
变量	标称值	均值 μ	标准差 σ	最大允许误差 γ	置信水平 ε
x_0	-0.089 2	0	0.001	0.003	0.9
y_0	-0.993 5	0	0.001	0.003	0.9
z_0	0.070 1	0	0.001	0.003	0.9
T_3	215.448 2	0	1	2	0.9

图3中显示了上升器整个飞行过程中的状态变化以及轨道参数的变化，可以清晰地辨别出飞行过程的3个阶段：

1) 上升段，第一级燃料耗尽，将上升器速度迅速提升至2300 m/s以上；

2) 无动力滑行段，上升器仅靠惯性飞行，速度平缓下降，高度持续上升，阶段结束时上升器已接近300 km目标高度；

3) 入轨段，起始时刻第一级分离导致质量瞬间降低，而后第二级发动机启动，进行最后的入轨调整。3种方法的最终轨道高度、倾角、偏心率、升交点赤经

均达到目标轨道参数要求, 第二级燃料有若干剩余。

由图3结果可得, 考虑初始位置和推力幅值的不确定性时, 包含机会约束的序列凸优化算法仍然能够按

照预定的3个飞行阶段到达设定的300 km目标圆轨道, 所有轨道参数均成功收敛到目标值, 证明了本文提出方法的可行性和有效性。

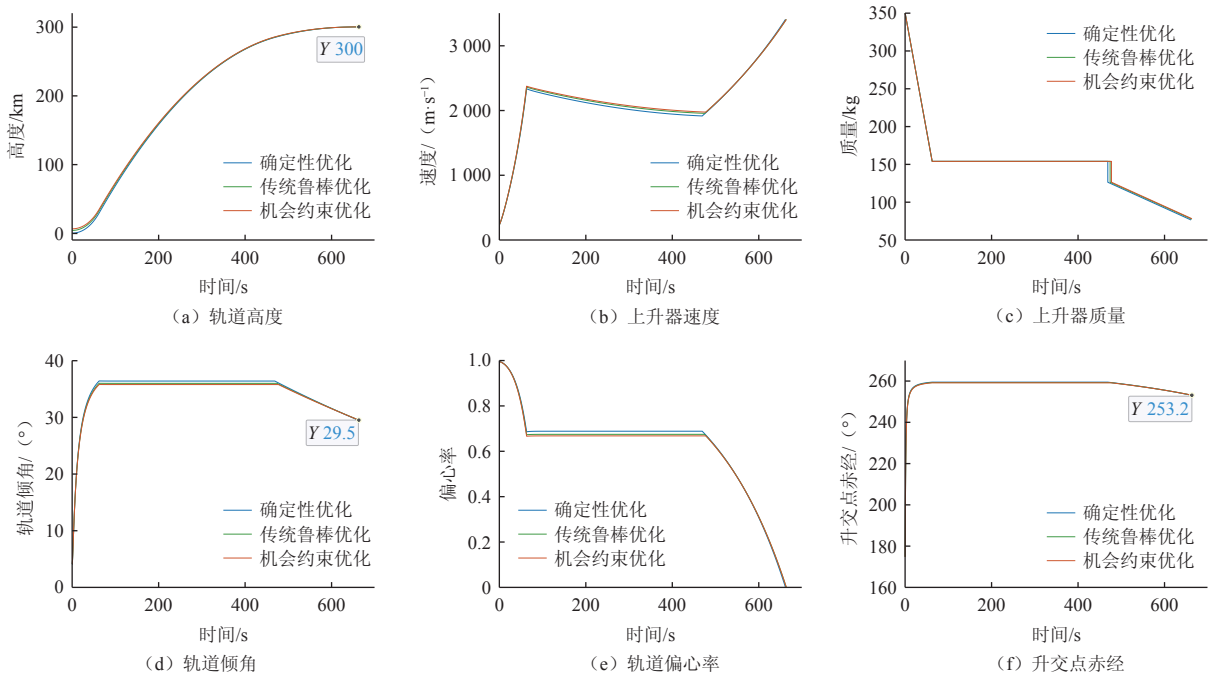


图 3 轨迹优化结果

Fig. 3 Trajectory optimization results

由于程序中引入了机会约束和随机变量, 以及数值求解的机器误差等, 优化时间及最终指标值存在较小的波动范围。因此本文进行了多组仿真, 并对优化结果做平均处理。最终得到3种方法的性能指标、平均迭代次数及平均运行时间如表4所示。

表 4 性能指标及迭代参数对比

Table 4 Comparison of performance indicators and iteration parameters

方法	性能指标	迭代次数	迭代时间/s
确定性	-76.4845	87	260.5128
鲁棒优化	-77.5984	55	159.8475
机会约束	-78.1503	83	428.0042

由表4中结果可知, 相比于确定性轨迹优化, 机会约束轨迹优化由于引入随机变量而获得了更优的性能指标, 体现出随机优化的裨益。另一方面, 机会约束使得优化程序更加复杂, 平均运行时间比确定性轨迹优化更长。

相比于不允许违反约束的传统鲁棒轨迹优化, 机会约束轨迹优化同样得到了更优的性能指标。这是因为机会约束允许以一定概率违反约束, 从而保守性更低。然而, 其迭代次数和运行时间均大于传统鲁棒轨

迹优化。

综合来看, 机会约束轨迹优化算法的结果更优, 但计算效率较低。导致计算效率低的原因可能在于, 上述机会约束问题的求解包含通过大量随机样本近似概率期望的过程。尤其针对推力幅值的不确定性, 每次迭代的所有时间点均需要执行马尔科夫链蒙特卡洛抽样策略, 因此耗费大量计算时间。另外, 优化结果具有一定的随机性可能也是导致迭代次数多、计算时间长的原因之一。因此, 提高机会约束轨迹优化程序的收敛性和计算速度将是未来的一个重点研究方向。

3.3 机会约束的风险管理作用分析

机会约束的基本描述中, ε 为满足约束的概率阈值, 可以理解为置信水平, 相应地 $1 - \varepsilon$ 可以称为风险参数。生成10万个如表3所示参数的正态分布随机变量, 进行蒙特卡洛仿真, 统计存在不确定性时关于最大允许误差的实际违反率, 从而分析机会约束的风险管理作用。其中关键指标“实际违反率”定义为: $vio = \text{违反约束的蒙特卡洛次数} / \text{总蒙特卡洛次数}$, 即随机试验中违反约束的比例。

针对初始位置的不确定性, 在 $\varepsilon \in [0.75 - 0.99]$ 中每隔0.01选择一个数据点进行测试, 并将结果进行插

值拟合,得到直观的 ε 与三轴实际违反率之间的关系,如图4所示。由图4中统计拟合结果可见,初始位置三轴实际违反率始终低于设定的风险参数,并且实际违反率随着风险参数的改变而相应变化。

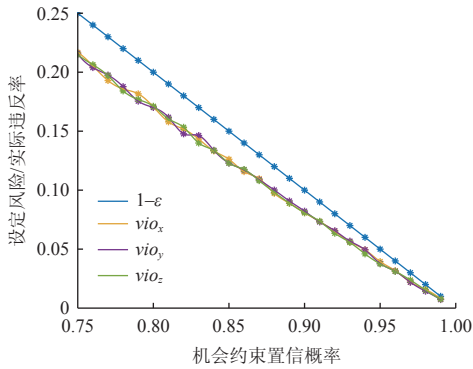


图4 初始位置机会约束实际违反率

Fig. 4 Actual violation rates of initial position chance constraints

针对推力幅值的不确定性,设定风险参数为0.1,进行有无机会约束的对比仿真,得到第三阶段推力实际违反率结果如图5所示。由图5可见,若不针对推力幅值不确定性进行处理,则实际违反率可能远远超出设定风险参数;而加入机会约束可以将实际违反率控制在风险参数以内。

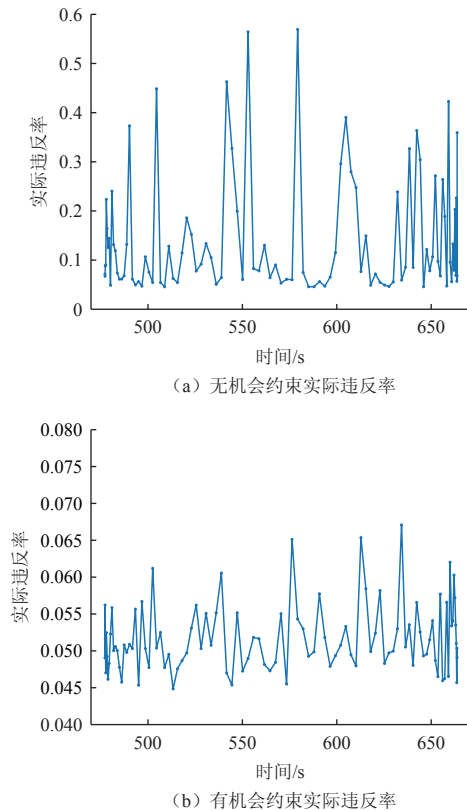


图5 推力幅值约束实际违反率

Fig. 5 Actual violation rates of thrust amplitude constraints

以上结果表明,在求解包含不确定性的轨迹优化问题时,可基于机会约束对问题风险进行灵活调控,验证了机会约束的风险管理作用。

3.4 概率近似函数保守性对比

采用Bernstein近似函数、本文近似函数 Ψ 分别对初始位置机会约束进行近似取值,统计随机变量下的实际违反率,从而进行保守性对比。Bernstein近似函数的具体形式为

$$\Phi(\alpha\chi) = e^{\alpha\chi} \quad (30)$$

对比结果记录在表5中。由表5可得,两种近似函数所得实际违反率均小于风险参数,然而近似函数 Ψ 所得违反率更加接近风险参数。因此本文近似方式的保守性更低,指标值更小,即得到了燃料消耗更少的上升轨迹。

表5 不同近似函数优化结果对比

Table 5 Comparison of optimization results with different approximation functions

近似函数	vio_x	vio_y	vio_z	$(1-\varepsilon)$	指标值
Φ	0.015 64	0.014 61	0.015 53	0.1	-77.43
Ψ	0.080 39	0.081 04	0.079 42	0.1	-78.1498

4 结 论

本文针对两级定推力、三飞行阶段的火星上升器,将初始位置和推力幅值的不确定性描述为机会约束,建立起考虑不确定性的机会约束轨迹优化问题模型;针对概率函数及其导数难以计算的问题,采用一种新的平滑近似函数和马尔科夫链蒙特卡洛采样策略,将概率约束转化为确定性约束;使用无损凸化、连续线性化对包含机会约束在内的非凸约束进行了凸化处理,而后使用序列凸优化方法迭代求解,成功获得满足目标参数的优化轨迹。

本文的创新点和主要贡献在于:采用一种新的平滑近似函数构造机会约束,并与序列凸优化框架结合,用于求解火星上升器轨迹优化问题;优化结果表明本文所提出的机会约束轨迹优化方法可获得比确定性优化和传统鲁棒优化更优的性能指标,即所得燃料消耗更低;蒙特卡洛仿真验证了机会约束的风险管理作用,并且对比试验表明本文采用的近似函数具有更低的保守性。

本文研究仍存在一定的局限性,如未考虑火星上升过程中的其他不确定性因素、迭代求解时间较长、实时性不高等。因此,下一步的研究方向包括:多源不确定性耦合建模;嵌入更高效的求解器以提升计算速度;设计自适应策略以提高收敛速度等。同时,未

来将研究算法可能的潜在局限性, 例如对概率分布假设的敏感性, 并探索将本方法应用于其他任务场景, 例如存在大气参数不确定性的火星进入段轨迹优化。

参考文献

- [1] 张众, 武迪, 宝音贺西. 深空探测任务进展与展望[J]. 上海航天(中英文), 2024, 41(5): 52-68.
ZHANG Z, WU D, BAO Y H X. Progress and prospects of deep space exploration missions[J]. Aerospace Shanghai (Chinese & English), 2024, 41(5): 52-68.
- [2] 孟林智, 董捷, 许映乔, 等. 无人火星取样返回任务关键环节分析[J]. 深空探测学报(中英文), 2016, 3(2): 114-120, 128.
MENG L Z, DONG J, XU Y Q, et al. Analysis of key technologies for unmanned mars sample return mission[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2016, 3(2): 114-120, 128.
- [3] 崔乃刚, 郭冬子, 李坤原, 等. 飞行器轨迹优化数值解法综述[J]. 战术导弹技术, 2020(5): 37-51, 5, 75.
CUI N G, GUO D Z, LI K Y, et al. A survey of numerical methods for aircraft trajectory optimization[J]. Tactical Missile Technology, 2020(5): 37-51, 5, 75.
- [4] BETTS J T. Survey of numerical methods for trajectory optimization[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(2): 193-207.
- [5] 雍恩米, 陈磊, 唐国金. 飞行器轨迹优化数值方法综述[J]. 宇航学报, 2008(2): 397-406.
YONG E M, CHEN L, TANG G J. A survey of numerical methods for trajectory optimization of spacecraft[J]. Journal of Astronautics, 2008(2): 397-406.
- [6] 张友安, 王丽英, 张刚, 等. 轨迹优化的直接数值解法综述[J]. 海军航空工程学院学报, 2012, 27(5): 481-486, 498.
ZHANG Y A, WANG L Y, ZHANG G, et al. A survey of numerical methods for trajectory optimization[J]. Journal of Naval Aeronautical and Astronautical University, 2012, 27(5): 481-486, 498.
- [7] 杨奔, 李天任, 马晓媛. 基于序列凸优化的多约束轨迹快速优化[J]. 航天控制, 2020, 38(3): 25-30.
YANG B, LI T R, MA T Y. Fast multi-constraints trajectory optimization based on sequence convex optimization[J]. Aerospace Control, 2020, 38(3): 25-30.
- [8] SZMUK M, ACIKMESE B, BERNING A W. Successive convexification for fuel-optimal powered landing with aerodynamic drag and non-convex constraints[C]//Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. [S. l.]: IEEE, 2016.
- [9] LI K, GUO Y, RAN G, et al. Adaptive sequential convex programming for mars ascent vehicle multi-phase trajectory optimization[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2024, 60(6): 9369-9382.
- [10] MARMO N. Robust trajectory optimization with chance-constrained formulation[D]. Sapienza: University of Rome, 2024.
- [11] 江秀强. 火星进入不确定性量化与鲁棒最优制导方法研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2019.
JIANG X Q. Uncertainty quantification and robust optimal guidance methods for Mars entry[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2019.
- [12] 闫循良, 王培臣, 郭杨. 再入滑翔机动突防轨迹规划与制导方法综述[J]. 航空学报, 2025, 46(17): 244-271.
YAN X L, WANG P C, GUO Y. Review of trajectory planning and guidance methods for entry glide maneuvering penetration[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2025, 46(17): 244-271.
- [13] NEMIROVSKI A, SHAPIRO A. Convex approximations of chance constrained programs[J]. SIAM Journal on Optimization, 2007, 17(4): 969-996.
- [14] ZHAO Z, KUMAR M. Split-bernstein approach to chance-constrained optimal control[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2017, 40(11): 2782-2795.
- [15] CHAI R, SAVVARIS A, TSOURDOS A, et al. Solving trajectory optimization problems in the presence of probabilistic constraints[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(10): 4332-4345.
- [16] BENITO J, MEASE K D. Characterizing the controllable entry states and reachable sites for planetary landing[C]//Proceedings of 6th International Planetary Probe Workshop. Atlanta, GA: [s. n.], 2008.
- [17] LU P, SUN H, TSAI B. Closed-loop endoatmospheric ascent guidance[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2003, 26(2): 283-294.
- [18] ZHANG P, WU D, GONG S. Trajectory optimization for aerodynamically controlled missiles by chance-constrained sequential convex programming[J/OL]. Aerospace Science and Technology, 2024, 153: 109464. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1270963824005959>.
- [19] CHIB S, GREENBERG E. Understanding the metropolis-hastings algorithm[J]. The American Statistician, 1995, 49(4): 327-335.
- [20] MAO Y, SZMUK M, XU X, et al. Successive convexification: a superlinearly convergent algorithm for non-convex optimal control problems[EB/OL]. (2018-04-18)[2025-08-05]. <https://arxiv.org/abs/1804.06539>.
- [21] BLACKMORE L, ONO M, WILLIAMS B C. Chance-constrained optimal path planning with obstacles[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2011, 27(6): 1080-1094.

作者简介:

郭春正(2003-), 女, 硕士研究生, 主要研究方向: 轨迹优化。

通信地址: 哈尔滨市南岗区西大直街92号哈尔滨工业大学航天学院(150001)

电话: 19560959622

E-mail: 25S104087@stu.hit.edu.cn

郭延宁(1985-), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向: 深空探测制导与控制、航天器任务规划、最优控制等。**本文通信作者。**

通信地址: 哈尔滨市南岗区西大直街92号哈尔滨工业大学航天学院(150001)

电话: 13204519660

E-mail: guoyun@hit.edu.cn

Chance-Constrained Trajectory Optimization for Mars Ascent Vehicle Based on Sequential Convex Optimization

GUO Chunzheng¹, WANG Pengyu¹, GUO Minwen^{2,3}, HUANG Xiangyu^{2,3}, GUO Yanning¹

(1. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;

2. Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100094, China;

3. State Key Laboratory of Space Intelligent Control, Beijing 100094, China)

Abstract: The Mars ascent vehicle is tasked with sending Martian samples into space orbit, and its trajectory optimization is a crucial part of the Mars sample return mission. The scenario of the Mars ascent mission is complex and subject to various uncertainties. However, traditional trajectory optimizations are mostly based on nominal models, with limited ability to address uncertainties. In this thesis, the uncertainties in the initial position and thrust amplitude were described as chance constraints, so a chance-constrained trajectory optimization problem was established. Then the optimal trajectory was iteratively solved using sequential convex optimization method. Numerical simulation results verified the effectiveness of the proposed method. Comparisons also demonstrated that this method achieved better performance indicators and exhibited less conservatism than traditional robust optimization. In addition, a comparative analysis of the risk management effect of chance constraints and the conservatism of probability approximation functions was conducted.

Keywords: Mars ascent vehicle; trajectory optimization; chance constraint; sequential convex optimization

Highlights:

- A new smooth approximation function is adopted to construct chance constraints, and it is combined with the sequential convex optimization framework to solve the trajectory optimization problem.
- It is demonstrated by comparison that the proposed chance-constrained trajectory optimization method realizes superior fuel performance and reduced conservatism.
- The role of chance constraints in risk management is analyzed and verified in detail and verified.

[责任编辑: 宋宏, 英文审校: 宋利辉]