

面向高精度历表的月球轨道与天平动建模及LLR数据应用

杨婉玲¹, 高梧桐¹, 粟文捷¹, 鄢建国¹, 平劲松²

(1. 武汉大学 测绘遥感信息工程国家重点实验室, 武汉 430079; 2. 中国科学院 国家天文台, 北京 100101)

摘要: 提出一套统一建模与程序化实现的月球动力学框架。基于广义相对论弱场近似, 系统整合了轨道运动与双层受迫天平动过程中的主要物理效应, 包括主带小天体引力、太阳 J_2 项、潮汐变形与转动惯量时延, 统一了动力学推导、参考系定义与时间系统规范, 构建了模块化、高一一致性的建模与处理体系。在此基础上, 处理了2015—2021年的双程月球激光测距(Lunar Laser Ranging, LLR)观测数据, 独立完成了月面反射器与地面测站的坐标解算。结果表明, 轨道预报与DE430星历在地月连线方向的最大差异控制在0.182 m以内, 天平动欧拉角50年预测偏差保持在600 mas量级; LLR数据平差后的单程残差均方根(Root Mean Square, RMS)分别达到2.46 cm(反射器平差后)与1.68 cm(地面站平差后)。验证了统一建模体系的物理一致性与实测适配性, 为自主编制高精度月球历表提供了关键技术支撑。

关键词: 月球轨道预报; 天平动预报; 月球双层受迫天平动模型; LLR数据处理

中图分类号: P135+1

文献标识码: A

文章编号: 2096-9287(2025)03-0294-11

DOI: 10.3724/j.issn.2096-9287.2025.20250011

引用格式: 杨婉玲, 高梧桐, 粟文捷, 等. 面向高精度历表的月球轨道与天平动建模及LLR数据应用[J]. 深空探测学报(中英文), 2025, 12(3): 294-304.

Reference format: YANG W L, GAO W T, SU W J, et al. Lunar orbit, libration modeling and LLR data application for high-precision ephemeris[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2025, 12(3): 294-304.

引言

月球因其独特的科学价值、丰富的资源潜力和技术验证功能, 已成为深空探测任务中的优先目标。缺乏大气和活跃的地质活动^[1], 月球保留了大量原始地质信息, 是研究地月系起源与演化的重要窗口; 丰富的氦-3、稀土金属和水资源^[2], 为未来月球基地的建设提供了资源保障。作为距离地球最近的天体, 月球成为了测试深空通信、精确着陆与资源利用等技术的理想场所^[3], 为更远的星际探索奠定了坚实基础。

当前, 月球探测已成为各国突破新技术、提高探测精度、获取新科学发现的重要平台, 是展示科技实力、引领未来太空格局的关键竞赛。过去几十年, 中国探月取得了显著成绩。在“嫦娥六号”(CE-6)首次实现月背着陆采样的基础上^[4], “嫦娥七号”(CE-7)任务中计划在月球南极布设激光发射器, 开展激光测月工作^[5]。美国作为最早进行月球探测的国家, 时隔50年于2019年宣布重返月球, 并联合欧洲、日本、韩国等国如期推进“阿尔忒弥斯”(Artemis)计划^[6], “奥德修斯号”(Odyssey)于2024年2月成功着陆月球南

极。“阿尔忒弥斯3号”(Artemis 3)计划将于2026年9月发射, 标志着人类将首次对月球南极进行载人探索^[7]。除中美外, 印度空间研究组织(Indian Space Research Organisation, ISRO)与日本宇宙航空研究开发机构(Japan Aerospace eXploration Agency, JAXA)联合的月球极地探测任务(LUNar Polar EXploration project, LUPEX)已于2018年完成可行性报告, 计划在2028年发射^[8]; 同时, 俄罗斯的“月球26~28号”(Luna 26-28)系列无人探测器也在筹备中, 为载人登月及建立月球基地做准备^[9]; 欧洲航天局(European Space Agency, ESA)则正在准备一项月球表面任务, 目标是在2025年之前验证在月球上生产水或氧气的可行性^[10]。

确定月球轨道和天平动参数是执行探月任务的基础。随着中国探月任务难度不断升级, 对自主研制高精度、可控的月球轨道和天平动历表提出了前所未有的挑战。为支持高精度的月球和行星任务, DE440及其优化版DE441历表由美国喷气推进实验室(Jet Propulsion Laboratory, JPL)研发^[11], 通过更新测量数

据、引入柯伊伯带天体和小行星质量影响、修正太阳系质心位置、加入太阳自转引起的Lense-Thirring效应及统一时间尺度, 提高了天体运动分析的时间一致性; 法国天体力学与历算研究所 (Institute of Celestial Mechanics & Calculation of the Ephemerides, IMCCE) 发布的INPOP21a则在INPOP20a的基础上^[12], 纳入了木星观测数据和小行星质量估算, 并加入Lense-Thirring效应以更精确描述太阳自转效应; 俄罗斯科学院应用天文学研究所 (Institute of Applied Astronomy of the Russian Academy of Sciences, IAA RAS) 开发的EPM2021历表^[13]同样在动力学模型和观测数据上实现了类似改进。可见, 动力学模型的持续优化是高精度星历研发的不竭动力。DE430历表^[14]作为其中的重要代表, 长期以来凭借精细化的动力学模型和丰富的观测数据, 成为高精度月球轨道和天平动参数计算的重要基准。然而, 随着探月任务的复杂化和观测需求的提高, DE430的局限性逐渐显现。与之进行对比不仅是验证新历表精度的重要手段, 也为中国高精度月球历表研发提供了参考依据。

中国科学家团队在月球历表方面也开展了较多的工作。田伟等^[15]基于DE430历表, 采用加权最小二乘方法处理了1925—2021年的观测数据, 成功编制出PETREL19行星和月球星历。杨永章等^[16]则在月球自转动力学方面表现出色, 与俄罗斯高精度双层月球天平动模型横向对比后, 开发出50年长周期天平动预报产品, 与INPOP17a的差异不超过500 mas。魏二虎等^[17-18]依托“嫦娥三号”实测数据, 结合LSTM与ARIMA模型开展天平动参数预测, 虽实现了高精度预报, 但依赖数据驱动, 物理建模部分占比较轻。在以往研究的基础上, 本文聚焦于精化月球的轨道动力学与自转动力学模型, 以与国际高精度历表保持一致性为目标, 进一步缩小力学模型的差异。此外, 本研究还进一步处理了2015—2021年的月球激光测距数据, 并实现了月面反射器和地面测站坐标解算, 为后续月球历表参数解算提供平台支持。

1 运动方程和扰动方程

月球轨道与天平动动力学建模涉及复杂多源的物理机制与高精度数值处理要求。现有研究中, 轨道运动与自转天平动往往由独立建模体系分别支撑, 物理假设、参考系定义及数值规范之间存在差异, 难以满足高精度长期预报的一致性需求。针对这一现状, 本研究提出并实现了一套统一建模与程序化实现的月球动力学框架, 分别整合轨道动力学与双层受迫天平动过程中的关键物理效应, 构建了模块化、高一一致性的

建模与处理体系。

本研究统一采用太阳系质心参考系 (Barycentric Celestial Reference System, BCRS) 作为空间参考框架, 并使用太阳系质心动力学时 (Barycentric Dynamical Time, TDB) 作为时间参数基准。轨道状态向量与天平动状态参数的定义、动力学推导、数值积分及观测数据处理均遵循该统一参考系与时间系统, 确保建模推导与数值实现的太阳系质心参考系一致性。

月球轨道和双层受迫天平动物理状态预报的本质是求解常微分系统的过程。月球的轨道运动方程和天平动扰动方程 (即轨道动力学与自转动力学模型) 是建立该微分方程的基础, 数值方法是求解该微分系统的手段。

月球轨道状态指的是在太阳系质心参考系中, 以太阳系质心动力学时为时间标度, 描述的三维位置和三维速度随时间变化的参数序列, 表达式为

$$y_{\text{orbit}}(t)_{6 \times 1} = \left(r^T(t), v^T(t) \right)^T \quad (1)$$

此状态满足式 (2) 的一阶微分

$$f_{\text{orbit}}(t, y)_{6 \times 1} = \left(v^T(t), a^T(t) \right)^T \quad (2)$$

位置二阶导数 $a^T(t)$ 的表达式由运动方程给出, 完成整个月球轨道常微分系统的构建。

双层受迫天平动常微分系统与轨道常微分系统推导类似。月球双层受迫天平动状态指的是在太阳系质心参考系中, 以太阳系质心动力学时为时间标度, 描述的月幔和月核的欧拉角及角速度随时间变化的演化过程, 其表达式为

$$y_{\text{libration}}(t) = \left(\phi_m(t), \theta_m(t), \psi_m(t), \omega_{m,x}(t), \omega_{m,y}(t), \omega_{m,z}(t), \phi_c(t), \theta_c(t), \psi_c(t), \omega_{c,x}(t), \omega_{c,y}(t), \omega_{c,z}(t) \right)^T \quad (3)$$

其中: 下标m代指月幔; 下标c代指月核; $\phi(t)$ 、 $\theta(t)$ 、 $\psi(t)$ 为月幔或月核欧拉角; $\omega_x(t)$ 、 $\omega_y(t)$ 、 $\omega_z(t)$ 为月幔或月核的角速度, 式 (3) 满足式 (4) 的一阶微分

$$f_{\text{libration}}(t, y) = \left(\dot{\phi}_m(t), \dot{\theta}_m(t), \dot{\psi}_m(t), \dot{\omega}_{m,x}(t), \dot{\omega}_{m,y}(t), \dot{\omega}_{m,z}(t), \dot{\phi}_c(t), \dot{\theta}_c(t), \dot{\psi}_c(t), \dot{\omega}_{c,x}(t), \dot{\omega}_{c,y}(t), \dot{\omega}_{c,z}(t) \right)^T \quad (4)$$

其中: 角速度 $\dot{\omega}_x(t)$ 、 $\dot{\omega}_y(t)$ 、 $\dot{\omega}_z(t)$ 关于时间的微分分量需要通过扰动方程进行计算, 从而构建双层月球天平动常微分系统。

基于上述原则, 本文分别构建了月球轨道动力学模型与双层受迫天平动动力学模型, 以下将分别进行详细推导与分析。

1.1 运动方程

1) 广义相对论下的质点引力

在广义相对论的弱场和低速近似条件下, 爱因斯坦

坦-英费尔德-霍夫曼-德罗斯特-洛伦兹 (Einstein-Infeld-Hoffmann-Droste-Lorentz, EIHDL) 方程通过各向同性的参数化后牛顿 (Parameterized Post-Newtonian, PPN) 度规对传统爱因斯坦-英费尔德-霍夫曼 (Einstein-Infeld-Hoffmann, EIH) 方程^[19]进行扩展, 定义了多体系统中质点相互作用的相对论性计算公式

$$a_{A,pm-pm} = \sum_{B \neq A} \frac{\mu_B}{r_{AB}^3} \mathbf{r}_{AB} - \sum_{B \neq A} \frac{\mu_B \mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}^3 C^2} \left\{ 4\mathbf{v}_A \mathbf{v}_B - v_A^2 - 2v_B^2 + 4 \sum_{C \neq A} \frac{\mu_C}{r_{AC}} + \sum_{C \neq B} \frac{\mu_C}{r_{BC}} + \frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{r}_{BA} \mathbf{v}_B}{r_{AB}} \right)^2 - \frac{1}{2} \mathbf{r}_{AB} \mathbf{a}_B \right\} + \sum_{B \neq A} \frac{\mu_B}{r_{AB}^3 C^2} [\mathbf{r}_{BA} (4\mathbf{v}_A - 3\mathbf{v}_B)] (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) + \frac{7}{2C^2} \sum_{B \neq A} \frac{\mu_B}{r_{AB}^3} \mathbf{a}_B \quad (5)$$

其中: A 、 B 、 C 为参与引力相互作用的天体索引; $\mu = GM$ 为天体的引力参数; G 为万有引力常数, 如 μ_B 为天体 B 的引力参数; \mathbf{r} 为位置矢量, 下标则阐明了指向关系, 如 \mathbf{r}_{AB} 为天体 A 指向天体 B 的位置矢量; \mathbf{v} 为天体的速度矢量; \mathbf{a} 为天体的加速度矢量; C^2 为光速的平方。

式(5)中已经包含了PPN参数的预期值: $\beta = 1$, 引力叠加是完全线性的; $\gamma = 1$, 引力场完全弯曲了时空; 求和范围涵盖了太阳、月球、所有的行星以及小天体; 修正项中包含 C^{-2} 项, 因此在这些项中使用牛顿加速度作为近似是合理的, 误差不会超过 $O(C^{-2})$ 的量级。

参与本文月球PPN加速度计算的天体包括: 太阳、水星、金星、地球、月球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星以及小行星带内343个质量较大的小天体。

2) 点质点与天体非球形部分摄动力

质点和其它天体非球形部分的相互作用产生了非球摄动力, 常通过一组重力场系数(C_{nm}, S_{nm})和缔结勒让德函数表示^[20]

$$\mathbf{a}_{\text{non-spherical}} = -\nabla U = -\nabla \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{n_1} \sum_{m=0}^{m_1} \left(\frac{R}{r} \right)^n P_{nm}(\sin\varphi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \quad (6)$$

其中: ∇ 为拉普拉斯算子; $P_{nm}(\sin\varphi)$ 为 n 阶 m 次缔结勒让德函数; R 为天体的半径; (r, φ, λ) 为质点在该天体球坐标系下的位置表达式。 $m=0$ 的 $C_{n0} = J_n$ 被称为带谐项系数, S_{n0} 的值全部为0, $m < n$ 的系数为田谐系数, $m = n$ 为扁谐系数。

在质点自身体固坐标系下给出非球形引力加速度的计算公式

$$\begin{cases} a_x = \begin{cases} \frac{\mu}{R^2} \{-J_n V_{n+1,1}\}, \text{if } m = 0 \\ \frac{\mu}{2R^2} \left\{ -(C_{nm} V_{n+1,m+1} - S_{nm} W_{n+1,m+1}) + \frac{(n-m+2)!}{(n-m)!} (C_{nm} V_{n+1,m-1} + S_{nm} W_{n+1,m-1}) \right\}, \text{if } m > 0 \end{cases} \\ a_y = \begin{cases} \frac{\mu}{R^2} \{-J_n W_{n+1,1}\}, \text{if } m = 0 \\ \frac{\mu}{2R^2} \left\{ (-C_{nm} W_{n+1,m+1} + S_{nm} V_{n+1,m+1}) + \frac{(n-m+2)!}{(n-m)!} (-C_{nm} V_{n+1,m-1} + S_{nm} W_{n+1,m-1}) \right\}, \text{if } m > 0 \end{cases} \\ a_z = \frac{\mu}{R^2} (n-m+1) - C_{nm} V_{n+1,m} - S_{nm} W_{n+1,m} \end{cases} \quad (7)$$

其中, $V_{n,m}$ 和 $W_{n,m}$ 的计算式为

$$\begin{cases} V_{nm} = \frac{R^{n+1}}{r} P_{nm}(\sin\varphi) \cos(m\lambda) \\ W_{nm} = \frac{R^{n+1}}{r} P_{nm}(\sin\varphi) \sin(m\lambda) \end{cases} \quad (8)$$

式(7)给出了天体非球形部分A作用在质点B上的加速度, 用 $\mathbf{a}_{B,figA-pmB}$ 进行表示。则天体非球形部分A受到的反作用力产生的加速度计算表达式为

$$\mathbf{a}_{A,figA-pmB} = -\frac{m_B}{m_A} \mathbf{a}_{B,figA-pmB} \quad (9)$$

在本文中月球非球形部分引起的加速度包括3个来源: ①月球六阶次重力场和质点地球、太阳、水星、金星、火星及木星之间的相互作用; ②地球四阶次重力场和质点月球之间的相互作用。③太阳 J_2 项和月球之间的相互作用。

1.2 双层月球受迫天平动扰动方程

1) 月幔的欧拉角和角速度微分

月幔欧拉角是月球主轴 (Principal Axis, PA) 坐标系和惯性坐标系之间转换的桥梁, 其关系由式(10)描述^[21]

$$\mathbf{r}_{\text{inertial}} = R_z(-\phi_m(t)) R_x(-\theta_m(t)) R_z(-\psi_m(t)) \mathbf{r}_{\text{PA}} \quad (10)$$

月幔欧拉角的时间导数与月幔角速度相关, 其表达式为

$$\begin{cases} \dot{\phi}_m = \frac{\omega_{m,x} \sin\psi_m + \omega_{m,y} \cos\psi_m}{\sin\theta_m} \\ \dot{\theta}_m = \omega_{m,x} \cos\psi_m - \omega_{m,y} \sin\psi_m \\ \dot{\psi}_m = \omega_{m,z} - \dot{\phi}_m \cos\theta_m \end{cases} \quad (11)$$

月幔角速度的导数基于月幔力矩进行推导, 其计算公式为

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_m = I_m^{-1} \left\{ \sum_{A \neq M} N_{M,figA-figM} + N_{M,figE-figM} - \dot{I}_m \omega_m - \omega_m \times I_m \omega_m + N_{\text{cmb}} \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

式(12)中的参与计算计算的变量按照性质, 可分为月慢惯性张量 I_m 和3个力矩: 质点和月球非球形部分相互作用在月慢上的力矩 $N_{M,figA-figM}$, 月球非球形部分和地球非球形部分相互作用在月慢上的力矩 $N_{M,figA-figM}$ 以及月核和月慢相互作用在月慢上的力矩 N_{cmb} 。

未变形的总转动惯量和月核转动惯量都被是作为刚体下的转动惯量, 从未变形的总转动惯量 I_T^u 和月核转动惯量 I_c 可以得出月慢未变形转动惯量 I_m^u

$$I_m^u = I_T^u - I_c \quad (13)$$

I_T^u 和 I_c 的计算见式(14)和(15)

$$I_T^u = \begin{vmatrix} A_T & 0 & 0 \\ 0 & B_T & 0 \\ 0 & 0 & C_T \end{vmatrix} = \frac{2m_M R_M^2 J_{2,M}}{2\beta_L - \gamma_L + \gamma_L \beta_L} \begin{vmatrix} 1 - \gamma_L \beta_L & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \gamma_L & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \beta_L \end{vmatrix} \quad (14)$$

$$I_c = \begin{vmatrix} A_c & 0 & 0 \\ 0 & B_c & 0 \\ 0 & 0 & C_c \end{vmatrix} = \alpha_c C_T \begin{vmatrix} 1 - f_c & 0 & 0 \\ 0 & 1 - f_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (15)$$

$$\dot{I}_m = \frac{5k_{2,m} m_E R_m^5 \mathbf{r} \dot{\mathbf{r}}}{r^7} \begin{vmatrix} x^2 - \frac{1}{3}r^2 & xy & xz \\ xy & y^2 - \frac{1}{3}r^2 & yz \\ xz & yz & z^2 - \frac{1}{3}r^2 \end{vmatrix} - \frac{k_{2,m} m_E R_m^5}{r^5} \begin{vmatrix} 2\left(x\dot{x} - \frac{1}{3}\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}\right) & x\dot{y} + \dot{x}y & x\dot{z} + \dot{x}z \\ x\dot{y} + \dot{x}y & 2\left(y\dot{y} - \frac{1}{3}\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}\right) & y\dot{z} + \dot{y}z \\ x\dot{z} + \dot{x}z & y\dot{z} + \dot{y}z & 2\left(z\dot{z} - \frac{1}{3}\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}\right) \end{vmatrix} + \frac{k_{2,m} R_m^5}{3G} \begin{vmatrix} 2\left(\omega_{m,x}\dot{\omega}_{m,x} - \frac{1}{3}\omega_m \cdot \dot{\omega}_m\right) & \omega_{m,x}\dot{\omega}_{m,y} + \dot{\omega}_{m,x}\omega_{m,y} & \omega_{m,x}\dot{\omega}_{m,z} + \dot{\omega}_{m,x}\omega_{m,z} \\ \omega_{m,x}\dot{\omega}_{m,y} + \dot{\omega}_{m,x}\omega_{m,y} & 2\left(\omega_{m,y}\dot{\omega}_{m,y} - \frac{1}{3}\omega_m \cdot \dot{\omega}_m\right) & \omega_{m,y}\dot{\omega}_{m,z} + \dot{\omega}_{m,y}\omega_{m,z} \\ \omega_{m,x}\dot{\omega}_{m,z} + \dot{\omega}_{m,x}\omega_{m,z} & \omega_{m,y}\dot{\omega}_{m,z} + \dot{\omega}_{m,y}\omega_{m,z} & 2\left(\omega_{m,z}\dot{\omega}_{m,z} - \frac{1}{3}\omega_m \cdot \dot{\omega}_m\right) \end{vmatrix} \quad (17)$$

其中: r 为在 $(t - \tau_m)$ 时刻月球相对于地球的位置; ω_m 为 $(t - \tau_m)$ 时刻月慢的角速度; τ_m 为时间滞后因子; n 为月球的平均角速度; $k_{2,m}$ 为月球勒夫数。

$N_{M,figA-figM}$ 是其它质点作用月慢上的力矩, 计算公式见式(18), 其中 $a_{M,figA-figM}$ 已经在式(9)中给出。

$$N_{M,figA-figM} = M_M r_{AM} \times a_{M,figA-figM} \quad (18)$$

$N_{M,figE-figM}$ 是月球非球形部分和地球非球形部分相互作用在月慢上的力矩, 计算公式为

$$N_{M,figA-figM} = \frac{15\mu_E R_E^2 J_{2,E}}{2r_{EM}^5} \left\{ \left(1 - 7(\hat{\mathbf{r}}_{EM} \cdot \hat{\mathbf{P}})^2\right) (\hat{\mathbf{r}}_{EM} \times I_m \hat{\mathbf{r}}_{EM}) + 2(\hat{\mathbf{r}}_{EM} \cdot \hat{\mathbf{P}}) (\hat{\mathbf{r}}_{EM} \times I_m \hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{P}} \times I_m \hat{\mathbf{r}}_{EM}) - \frac{2}{5} (\hat{\mathbf{P}} \times I_m \hat{\mathbf{r}}_{EM}) \right\} \quad (19)$$

$J_{2,M}$ 是月球2阶带谐项, m_M 为月球质量, β_L 和 γ_L 是未变形总转动惯量的比率, f_c 是月核扁率, $\alpha_c = C_c/C_T$ 是月核未变形极惯量和总未变形极惯量之间的比值。

由于地球引起的月球潮汐以及月球自转的作用, 月慢的转动惯量被扭曲, 其计算公式被表示成为月慢未变形的转动惯量和随时间变化的两个扭曲项

$$I_m = I_m^u - I_E + I_{spin} = I_m^u - \frac{k_{2,m} m_E R_m^5}{r^5} \begin{vmatrix} x^2 - \frac{1}{3}r^2 & xy & xz \\ xy & y^2 - \frac{1}{3}r^2 & yz \\ xz & yz & z^2 - \frac{1}{3}r^2 \end{vmatrix} + \frac{k_{2,m} R_m^5}{3G} \times \begin{vmatrix} \omega_{m,x}^2 - \frac{1}{3}(\omega_m^2 - n^2) & \omega_{m,x}\omega_{m,y} & \omega_{m,x}\omega_{m,z} \\ \omega_{m,x}\omega_{m,y} & \omega_{m,y}^2 - \frac{1}{3}(\omega_m^2 - n^2) & \omega_{m,y}\omega_{m,z} \\ \omega_{m,x}\omega_{m,z} & \omega_{m,y}\omega_{m,z} & \omega_{m,z}^2 - \frac{1}{3}(\omega_m^2 - n^2) \end{vmatrix} \quad (16)$$

式(16)的导数为

$$\dot{I}_m = \frac{5k_{2,m} m_E R_m^5 \mathbf{r} \dot{\mathbf{r}}}{r^7} \begin{vmatrix} x^2 - \frac{1}{3}r^2 & xy & xz \\ xy & y^2 - \frac{1}{3}r^2 & yz \\ xz & yz & z^2 - \frac{1}{3}r^2 \end{vmatrix} - \frac{k_{2,m} m_E R_m^5}{r^5} \begin{vmatrix} 2\left(x\dot{x} - \frac{1}{3}\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}\right) & x\dot{y} + \dot{x}y & x\dot{z} + \dot{x}z \\ x\dot{y} + \dot{x}y & 2\left(y\dot{y} - \frac{1}{3}\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}\right) & y\dot{z} + \dot{y}z \\ x\dot{z} + \dot{x}z & y\dot{z} + \dot{y}z & 2\left(z\dot{z} - \frac{1}{3}\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}\right) \end{vmatrix} + \frac{k_{2,m} R_m^5}{3G} \begin{vmatrix} 2\left(\omega_{m,x}\dot{\omega}_{m,x} - \frac{1}{3}\omega_m \cdot \dot{\omega}_m\right) & \omega_{m,x}\dot{\omega}_{m,y} + \dot{\omega}_{m,x}\omega_{m,y} & \omega_{m,x}\dot{\omega}_{m,z} + \dot{\omega}_{m,x}\omega_{m,z} \\ \omega_{m,x}\dot{\omega}_{m,y} + \dot{\omega}_{m,x}\omega_{m,y} & 2\left(\omega_{m,y}\dot{\omega}_{m,y} - \frac{1}{3}\omega_m \cdot \dot{\omega}_m\right) & \omega_{m,y}\dot{\omega}_{m,z} + \dot{\omega}_{m,y}\omega_{m,z} \\ \omega_{m,x}\dot{\omega}_{m,z} + \dot{\omega}_{m,x}\omega_{m,z} & \omega_{m,y}\dot{\omega}_{m,z} + \dot{\omega}_{m,y}\omega_{m,z} & 2\left(\omega_{m,z}\dot{\omega}_{m,z} - \frac{1}{3}\omega_m \cdot \dot{\omega}_m\right) \end{vmatrix} \quad (17)$$

其中: $\hat{\mathbf{P}}$ 为单位地球极轴指向; $\hat{\mathbf{r}}_{EM}$ 为月球到地球的向量; I_m 为月球惯性张量; R_E 为地球的赤道半径; $J_{2,E}$ 为地球2阶带谐项。

N_{cmb} 是月核月慢间相互作用产生的作用在月慢上的力矩, 由式(20)进行计算

$$N_{cmb} = k_v (\omega_c - \omega_m) + (C_c - A_c) (\hat{\mathbf{z}}_m \omega_c) (\hat{\mathbf{z}}_m \times \omega_c) \quad (20)$$

其中: $\hat{\mathbf{z}}_m$ 为在月慢框架下单位月球极轴指向; k_v 为摩擦参数。

2) 月核的欧拉角和角速度微分

相似地, 月核欧拉角可以实现月核旋转系到惯性坐标系之间的转换, 月核欧拉角时间导数的计算公式为

$$\begin{cases} \dot{\phi}_c = (\omega_{c,x}^* \sin \psi_c + \omega_{c,y}^* \cos \psi_c) / \sin \theta_c \\ \dot{\theta}_c = \omega_{c,x}^* \cos \psi_c - \omega_{c,y}^* \sin \psi_c \\ \dot{\psi}_c = \omega_{c,z}^* - \dot{\phi}_c \cos \theta_c \end{cases} \quad (21)$$

其中: ω_c^* 为月核角速度在月核坐标系中的表达式, 和 ω_c 的关系如下

$$\begin{aligned} \omega_c^* &= R_z(\psi_c(t)) R_x(\theta_c(t)) \\ &R_z(\phi_c(t)) R_z(-\phi_m(t)) \\ &R_x(-\theta_m(t)) \\ &R_z(-\psi_m(t)) \omega_c \end{aligned} \quad (22)$$

月核角速度的微分计算式为

$$\dot{\omega}_c = I_c^{-1} \{-\omega_m \times I_c \omega_c - N_{cmb}\} \quad (23)$$

1.3 月球激光测距数据处理

月球激光测距 (Lunar Laser Ranging, LLR) 是一种通过测量激光脉冲从地面站发射至月面反射器并返回的光行时间, 以高精度获取地月距离的观测技术^[22]。自20世纪70年代以来, LLR已广泛应用于月球物理参数的反演与动力学建模, 当前观测精度已达到毫米量级, 使其在研究月球轨道、天平动及内部结构方面发挥了重要作用。

在数据处理过程中, 需将地面测站和月面反射器的坐标统一至太阳系质心天球参考系 (Barycentric Celestial Reference System, BCRS), 并在统一的时间系统——太阳系质心动力学时 (Barycentric Dynamical Time, TDB) 下进行光行时计算。地面站与反射器之间的双程测距可由发射与接收时刻之差乘以光速得到, 理论上为

$$\rho = \frac{1}{2} c (t_{\text{receive}} - t_{\text{transmit}}) \quad (24)$$

实现高精度LLR数据处理的关键在于若干物理改正项的引入。在本研究中, 考虑的改正项如下:

1) 地球固体潮改正

地球在太阳和月亮引潮力的作用下会发生周期性形变, 导致地面站位置的微小变化。固体潮位移包括时间域中的二阶与三阶改正, 以及频率域中的周日、半日和长周期分量。

2) 月球固体潮改正

天体引力同样引起月球表面的形变, 进而影响反射器坐标。目前尚无统一的月球固体潮模型, 通常将 IERS 2010规范中的地球二阶固体潮模型推广应用于月球。

3) 大气延迟改正

激光在穿越地球大气时受到折射影响, 实际传播路径大于几何距离, 从而引起光行时增加。可通过积

分大气折射率与真空中的差异得到延迟量

$$d_{\text{atm}}^z = 10^{-6} \int_{r_s}^{r_a} N dz = \int_{r_s}^{r_a} (n-1) dz \quad (25)$$

其中: N 为群折射率差; n 为大气群折射率指数; r_s 为地面站至地心的距离; r_a 为中性大气层顶端至地心的距离。

4) 引力弯曲改正 (Shapiro时延)

根据广义相对论, 光在天体引力场中传播路径将发生偏折, 导致光行时增加, 常称为Shapiro时延。该效应的计算公式为

$$c(t_M - t_1) = r_{1M} + \sum_{j=1}^N \left(\frac{2GM_j}{c^2} \right) \ln \left| \frac{r_{j1} + r_{jm} + r_{1M}}{r_{j1} + r_{jm} - r_{1M}} \right| \quad (26)$$

其中: t_1 为发射时刻; t_M 为到达反射器的时刻; c 为光速; r_{1M} 为激光沿直线传播的距离; r_{j1} 为天体至地面站的距离; r_{jm} 为天体至反射器的距离。

最终, 为获取高精度的月面反射器PA坐标和地面站ITRF坐标, 需对测距方程构建偏导数矩阵并结合观测数据的不确定度, 采用加权最小二乘法求解。权矩阵由观测不确定度 σ 构建, 单位为0.1 ps (1 ps = 1×10^{-12} s), 相应的距离误差为 $c\sigma$ 。其解为

$$\Delta x = (A^T W A)^{-1} A W r \quad (27)$$

其中: A 为测距模型对待解算坐标的偏导数矩阵; r 为观测残差向量; W 为权矩阵。更新后的坐标为

$$x_{\text{new}} = x_{\text{init}} + \Delta x \quad (28)$$

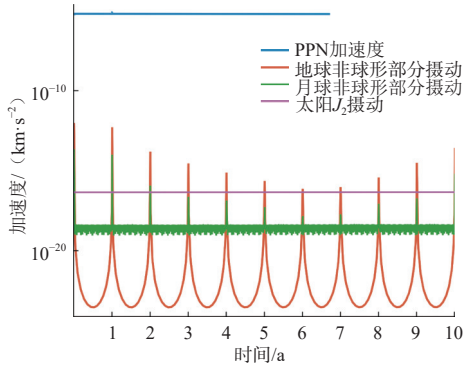
基于误差传播理论, 可进一步推导解算坐标的协方差矩阵以评估解的精度。

2 结果分析

2.1 月球轨道

尽管不同的积分算法和参数选择对月球轨道的积分预报会产生一定程度的影响, 但国际上各星历的发布并未公布算法和参数的详细设置, 难以衡量其中的影响程度。因此, 减小模型之间的差异是目前的主要发力点。以1.1节中叙述的运动方程为基础, 从J2000.0历元对月球轨道进行为期的积分。图1给出了各摄动力在10年间的量级大小变化图

从图1中可以看到, PPN加速度的量级最大, 其量级随时间几乎无变化, 呈现出平稳的态势; 太阳 J_2 项引起的加速度也是平稳的。同时, 除了每年的周期刻度外, 在大多数时间里太阳 J_2 项引起的加速度量级比其它两类因非球形部分与质点相互作用产生的加速度



注: 蓝色实线为PPN加速度量级, 紫色实线为太阳 J_2 项引起的加速度量级, 橙色实线为地球非球形部分作用在月球上的加速度量级, 绿色实线为月球非球形部分受到其它质点而产生的加速度量级。

图1 4类加速度的量级随时间的变化

Fig. 1 The magnitude of four types of acceleration changes with time

量级大; 相比之下, 其它两类因为天体非球形部分和质点之间相互作用而产生的形状加速度呈现出周期性变化的趋势; 橙色实线代表的地球非球形部分作用在月球上的力产生的加速度, 其周期明显与地球公转周期吻合, 其背后的原因可能与地球公转轨道周期(约一年)的变化相关, 地球的椭球形状以及其引力场的非均匀性对月球的引力作用也呈现出相应的周期变化关系; 绿色的实线表示的是质点引力作用在月球非球形部分上产生的加速度, 也呈现出约为一年的周期变化, 且峰值的量级变化趋势与地球非球形部分作用在月球上产生的加速度量级一致, 在年周期刻度上, 其量级比地球非球形部分引起摄动力加速度小。

轨道积分的结果与星历差值作为直接对比量, 反映了轨道动力学模型的精度, 差值的变化程度为我们提供了动力学模型和积分方法的稳定性信息。图2展示了10年月球轨道积分相对于太阳系质心(Solar System Barycenter, SSB)与DE430历表的差异。

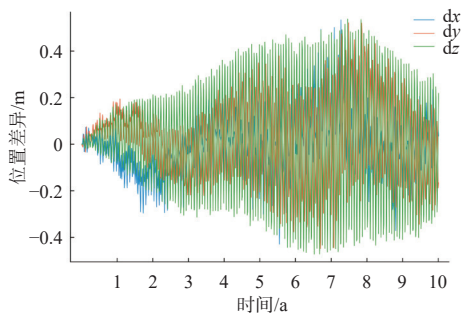


图2 本方案下计算得到的月球轨道预报结果和DE430历表之间10年的差异

Fig. 2 The 10-year difference between the lunar orbit prediction results calculated under this scheme and the DE430 ephemeris

图2显示了10年积分轨道与DE430的差异, 整体在亚米量级, 最大距离差异不超过0.758 m, 此结果表明

方案精度和稳定性较高。此外, 还可以看到在 z 方向上的差异相比较于 x 方向和 y 方向上的差异波动较大。在ICRF坐标系下, z 方向大致为地球自转轴的方向, x 和 y 方向构成的平面几乎与地球赤道面对齐。图2结果显示在在赤道内方向上的位置分量波动较小, 有助于控制地月连线解算的精度。

表1总结了在目前全力学模型下轨道预报的最大距离差异值, 以及缺省太阳 J_2 项或缺省343颗小行星扰动轨道预报产生的最大偏差值, 以此评估这两个力学模型的影响。

表1 不同力学模型配置下的轨道预报最大距离差值

Table 1 Maximum distance difference of orbit prediction under different mechanical model configurations.

力学模型	偏差/m
全力学模型	0.758
缺省太阳 J_2 项	1.541
缺省343颗小行星扰动	67.664

表1展示了在不同动力学模型配置下, 月球轨道预报结果与DE430星历之间的最大位置偏差。其中, “全力学模型”下的偏差为0.758 m, 作为本文优化模型的对标基准。相比之下, 当忽略太阳 J_2 项时, 偏差增大至1.541 m, 说明太阳 J_2 项对长时间轨道演化中实现亚米级精度预报中具有不可忽略的贡献。而当进一步忽略343颗小行星带天体的引力影响时, 最大偏差急剧上升至67.664 m, 显示出小天体集体引力对月球轨道长期稳定性具有显著扰动作用。该结果表明, 在构建高精度月球动力学模型时, 引入太阳 J_2 项及主带小行星的扰动对于提升轨道预测精度具有关键意义。

图3展示了本方案下地月连线上的距离和DE430之间的差异, 图4则展示了INPOP21和DE430星历中地月连线上距离的差异。

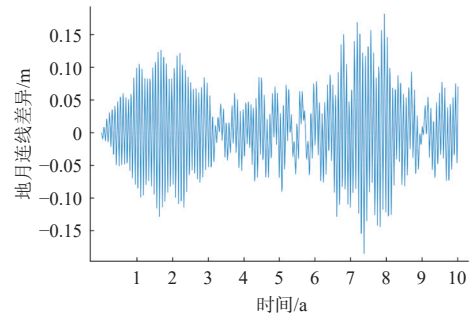


图3 地月连线和DE430之间的差异

Fig. 3 The difference between the Earth-Moon line and DE430

地月连线为月球测距、测速等数据处理建立基础, 地月连线的精度将间接影响月球内部结构的科学

考察^[22]。图3中显示本方案计算的地月连线与DE430间的差异不超过0.182 m, 而图4显示INPOP21和DE430的地月连线最大差异为0.618 m, 本方案下的轨道积分可为实测数据提供较好的基准。

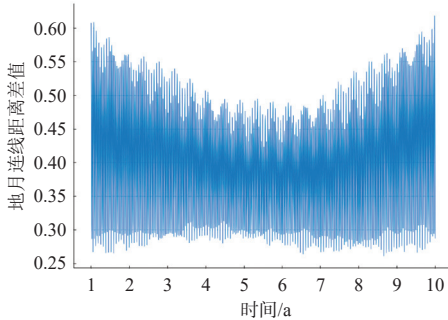


图4 INPOP21和DE430的地月连线差异

Fig. 4 Difference in the Earth-Moon line between INPOP21 and DE430

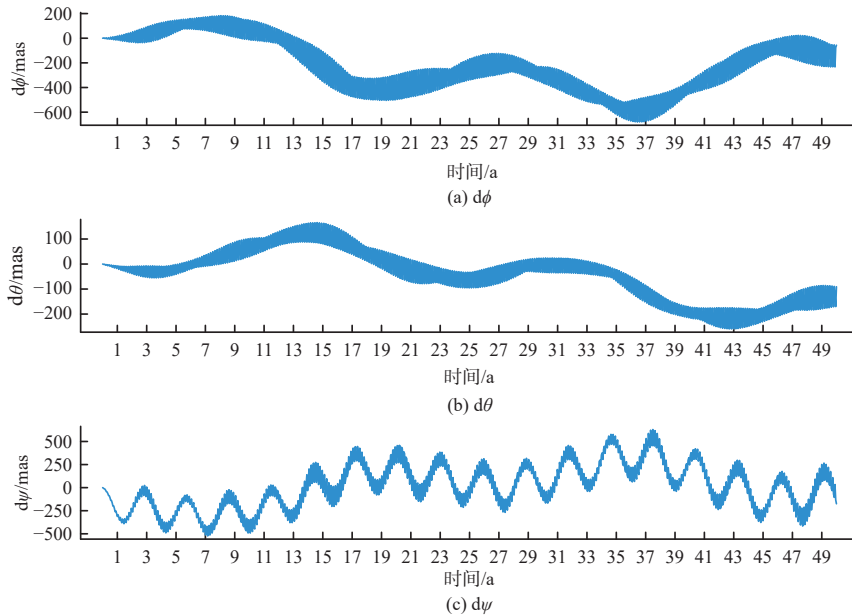


图5 50年预报中月幔欧拉角和DE430之间的差异

Fig. 5 The difference between the lunar mantle Euler angle and DE430

特别地, 时间滞后因子 τ_m 取值参考DE430历表给出的数值, 文中取 $\tau_m = 9.583\ 054\ 727\ 330\ 6690 \times 10^{-2}$ d。当 τ_m 变动 $\pm 20\%$ 时, 50年预报得到的欧拉角的最大变化约为90 mas, 其影响量级较大。

图6则显示了INPOP21星历和DE430星历中月幔欧拉角50年间的差异, 差值的周期特征明显, 且 ψ 方向上的差值最大。

为了更清楚地分析本研究和DE430差异中的周期特征, 图7在图5的基础上绘制了基于快速傅里叶变换下的月幔欧拉角差值的频谱图。

对于 ϕ 分量, 峰值出现在 $0.0369\ \text{d}^{-1}$, 对应的周期

2.2 月球天平动

双层模型下, 月球天平动共有12个初始状态参数, 但在实测数据处理过程中, 通常仅使用月幔欧拉角作为计算的主要参与参数, 并将其作为构建月固系与惯性系之间转换的工具。因此, 对天平动的结果分析主要放在月幔欧拉角上。图5给出了积分初始时刻从儒略日2440400.5开始下月幔欧拉角50年积分和DE430星历之间的差异。

从图5中可以看到积分得到的月幔欧拉角和DE430的最大差异大约在在600 mas, 各分量差值存在小周期的变化特征。 ϕ 分量上的差值最大, 为639.869 mas, θ 分量上的差值最小。与前面两个分量不同, ψ 分量上的差异较为均匀地分布在 ± 500 mas之间, 且存在长周期的特征。

为27.06 d, θ 分量的峰值与 ϕ 一致, 它们都表现出了27.06 d的短周期; 分量 ψ 的长周期特征更为明显, 峰值对应的周期为730.73 d, 同时, ψ 也存在短周期特征, 其对应的周期为365.3 d。 ϕ 和 θ 差值变化的短周期天数与月球自转周期一致, ψ 分量差值的短周期与地球公转周期一致, 这一结果可能暗示了地球引力、太阳引力延迟带来的力矩效应未完全包含在目前的解决方案中。

2.3 反射器坐标解算

各改正项对LLR的影响量级被评估, 统计在表2中。可以看出, 大气延迟和引力弯曲效应对测距结果

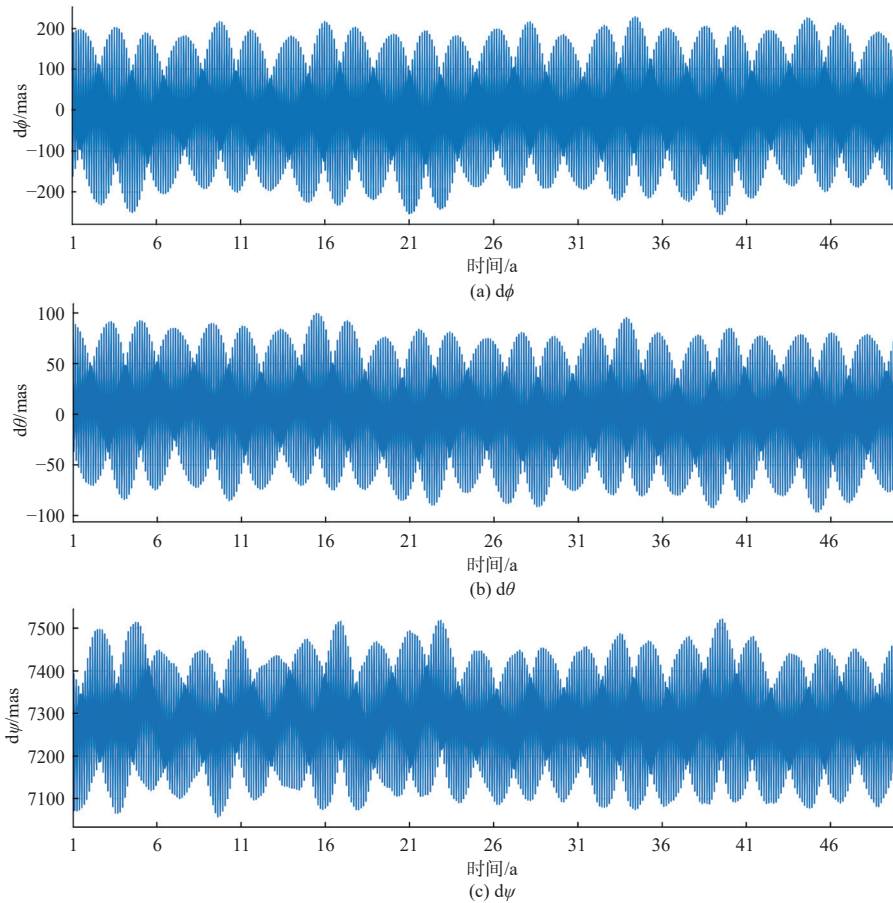


图 6 INPOP21和DE430月幔欧拉角50年间的差异

Fig. 6 The difference between the lunar mantle Euler angles of ephemeris INPOP21 and DE430 over 50 years

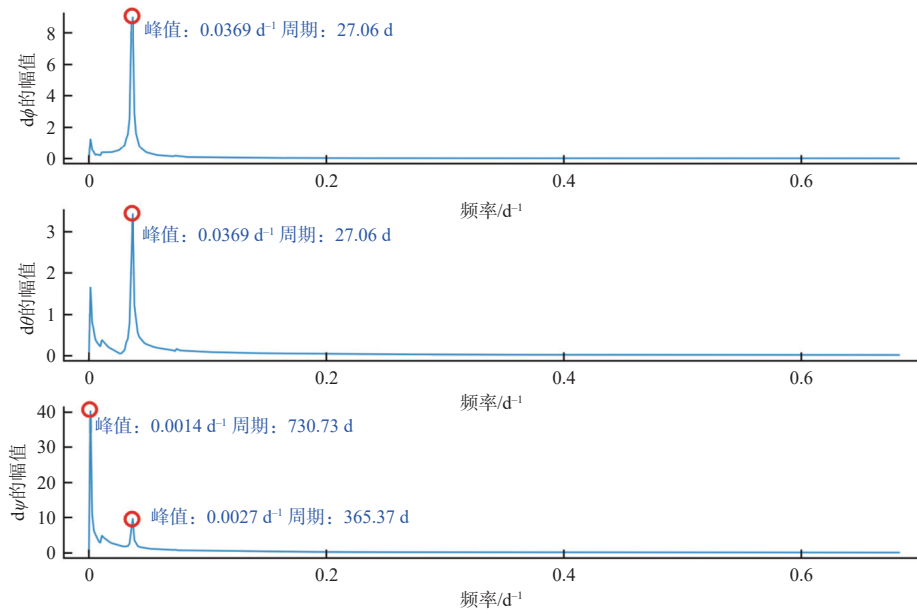


图 7 月幔欧拉角分量差值的频谱

Fig. 7 Spectrum of the lunar mantle Euler angle component difference

的影响最为显著, 分别达到米级; 而地球与月球的固体潮改正虽在数厘米量级, 但在毫米级测距精度需求

下同样不可忽略。不同改正项在各自参考系下建模, 需统一转换至BCRS中进行整体建模计算, 以确保测距

表2 LLR中主要模型修正项
Table 2 Corrective model in LLR

修正模型	坐标系	模型数值/m
地球固体潮	ITRS	0.05~0.3
月球固体潮	PA	0.15~0.6
大气延迟	ITRS	2~12
引力弯曲	BCRS	7~8

模型的一致性与精度。

以PA坐标系中月面反射器坐标为初值, 选用2015—2021年的LLR数据, 根据双程O-C残差, 排除大于1 m的明显错误的的数据点后, 使用剩余的9 375个有效数据, 最小二乘解算得到各反射器坐标改正值, 如表3所示。

表3 反射器坐标偏差估计结果
Table 3 Retro-reflector coordinate adjustment results

反射器	dx/m	dy/m	dz/m
“阿波罗11号”(Apollo 11)	-0.017 1	-0.093 0	-0.026 3
“月球车1号”(Lunokhod 1)	0.015 0	-0.071 8	-0.068 5
“阿波罗14号”(Apollo 14)	-0.028 7	0.125 7	0.031 7
“阿波罗15号”(Apollo 15)	-0.011 2	0.018 4	-0.135 0
“月球车12号”(Lunokhod 2)	0.010 6	-0.108 2	-0.095 2

由表3可知, x 轴的偏差估计值为毫米到厘米量级, y 轴和 z 轴的偏差估计值为厘米到分米量级, 与方振等使用LLR数据解算月球角反射器坐标中的解算结果相符^[22]。

图8为反射器坐标平差后2015—2021年LLR数据检核残差。

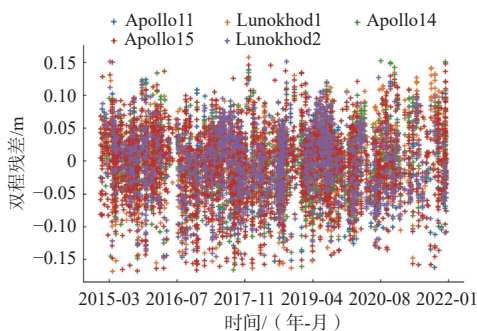


图8 反射器坐标平差后201—2021年LLR数据检核残差
Fig. 8 LLR data check residuals of 2015–2021 after retro-reflector coordinate adjustment

方振等使用LLR数据解算月球角反射器坐标平差后单程残差幅值约10 cm, RMS为3.49 cm^[23]。如图8所示, 本文通过解算反射器坐标, 获得的双程检核残差幅值约为15 cm (等效单程残差幅值为7.5 cm), 结果降低了25.00%。计算所得双程残差RMS约为4.92 cm (等效单程残差RMS为2.46 cm), 精度提升了29.51%。

2.4 地面站坐标解算

以ITRS坐标系中地面站坐标为初始值, 选用相同的2015—2021年的LLR数据, 根据双程O-C残差, 最小二乘解算得到各地面站坐标改正值, 如表4所示。

表4 地面站坐标偏差估计结果
Table 4 Retro-station coordinate adjustment results

地面站	dx/m	dy/m	dz/m
Grasse	-0.103 2	-0.010 7	-0.042 2
Matera	-0.109 5	-0.038 0	-0.011 8
Apache	0.048 6	0.113 2	-0.048 6
Wettzell	-0.082 7	-0.030 0	-0.092 0

表4的结果显示4个测站的坐标偏差均达厘米量级, 表明长期观测数据能够敏感地反映地面站坐标的微小变化。其中, Grasse与Matera的 dx 方向改正量较大, 分别为-0.103 2 m与-0.109 5 m, 可能与各自所在区域的构造运动或长期测站维护相关。而Apache站的 dy 方向偏差最大, 达0.113 2 m, 显示出较强的横向位置偏移, 值得结合GNSS或VLBI结果进一步分析。此外, Wettzell站的 dz 方向偏差达到-0.092 0 m, 提示在垂向坐标上可能存在较明显的系统性误差或站址沉降现象。这些结果验证了通过LLR残差反演地面站位置的可行性和精度, 并为进一步联合多源测量数据进行坐标一致性分析提供了依据。

图9为地面站坐标平差后2015—2021年LLR数据检核残差。

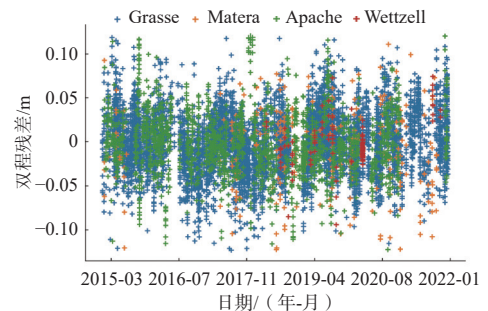


图9 地面站坐标平差后2015—2021年LLR数据检核残差
Fig. 9 LLR data check residuals of 2015–2021 after retro-station coordinate adjustment

本文通过解算地面站坐标, 获得的双程检核残差幅值约为10 cm (等效单程残差幅值为5 cm), 计算所得双程残差RMS约为3.36 cm (等效单程残差RMS为1.68 cm)。

对比图8和图9可以看出, 在采用相同初始数据集的条件下, 地面站坐标解算的检核残差显著优于角反射器解算结果。这一差异可能源于偏导数矩阵的构建方式: 地面站坐标解算同时整合了发射时刻和接收时

刻的坐标转换矩阵,而角反射器解算仅利用了反射时刻的转换矩阵,因此前者对测量精度的提升更为显著。

3 结束语

本文面向高精度月球轨道与天平动参数预报需求,提出并实现了统一建模与程序化实现的动力学建模框架。系统整合了轨道运动与双层受迫天平动中的主要物理效应,统一了动力学推导、参考系定义与时间系统规范,构建了模块化、高一一致性的动力学与数据处理体系。研究表明,轨道预报与DE430星历在地月连线方向的最大差异控制在0.182 m以内,天平动欧拉角50年预测偏差保持在600 mas量级,2015—2021年LLR数据处理后反射器与地面站的单程残差RMS分别达到2.46 cm和1.68 cm,验证了所建统一建模体系的物理一致性与实测适配性。

未来工作将基于本研究构建的统一建模与处理平台,进一步扩展地月系统自由天平动、内部结构耦合等长周期物理过程的建模能力,深化对地月系统长期动力学演化特性的刻画。同时,结合“嫦娥七号、八号”任务提供的新一代高精度LLR观测数据,开展月球历表参数的联合反演与高精度历表编制,持续提升自主深空测定轨与探测任务支持能力。

参考文献

- [1] WURZ P, FATEMI S, GALLI A, et al. Particles and photons as drivers for particle release from the surfaces of the Moon and mercury[J]. *Space Science Reviews*, 2022, 218(3): 10.
- [2] CRAWFORD I A. Lunar resources: a review[J]. *Progress in Physical Geography: Earth and Environment*, 2015, 39(2): 137-167.
- [3] 曹建峰, 满海钧, 王文彬, 等. 地月空间探测器星间链路定轨能力分析[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2025, 50(4): 637-646.
- [4] CAO J F, MAN H J, WANG W B, et al. Analysis of orbit determination capability for cislunar space probes using ISL data[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2025, 50(4): 637-646.
- [5] LI C, HU H, YANG M F, et al. Nature of the lunar far-side samples returned by the Chang'E-6 mission[EB/OL]. [2025-02-13]. <https://academic.oup.com/nsr/article/11/11/nwae328/7758366?login=false>.
- [6] WANG C, JIA Y, XUE C, et al. Scientific objectives and payload configuration of the Chang'E-7 mission[EB/OL]. [2024-12-07]. <https://dx.doi.org/10.1093/nsr/nwad329>.
- [7] 徐湛, 李平, 李坡. 美月球探测开发新动向[J]. *国防科技*, 2024, 45(2): 61-68.
- [8] XU Z, LI P, LI P. New trends in U. S. lunar exploration and development[J]. *National Defense Science & Technology*, 2024, 45(2): 61-68.
- [9] MAHANTI P, WILLIAMS J P, ROBINSON M S, et al. Dynamic secondary illumination in permanent shadows within artemis iii candidate landing regions[EB/OL]. [2025-02-13]. <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/PSJ/ad1b50>.

- [10] Lunar polar exploration mission for water prospection—JAXA's current status of joint study with ISRO[J]. *Acta Astronautica*, 2020, 176: 52-58.
- [11] 范唯唯, 杨帆, 鲁暘筱懿, 等. 俄罗斯“月球”25任务详解及未来月球探测任务展望[J]. *中国航天*, 2023(6): 9-16.
- [12] 欧洲航天局计划2025年前登月建基地[EB/OL]. [2025-02-13]. <https://www.cnsa.gov.cn/n6758823/n6758838/c6812058/content.html>.
- [13] PARK R S, FOLKNER W M, WILLIAMS J G, et al. The JPL planetary and lunar ephemerides DE440 and DE441[J]. *The Astronomical Journal*, 2021, 161(3): 105.
- [14] FIENGA A. Interplanetary laser tri-lateration network: simulation with INPOP planetary ephemerides[EB/OL]. (2023-01-16)[2025-02-13]. <https://arxiv.org/abs/2301.06394v1>.
- [15] PITJEVA E, PAVLOV D, AKSIM D, et al. Planetary and lunar ephemeris EPM2021 and its significance for Solar system research[J]. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 2019, 15(S364): 220-225.
- [16] FOLKNER W M, WILLIAMS J G, BOGGS D H, et al. The planetary and lunar ephemerides DE430 and DE431[EB/OL]. [2025-02-13]. https://www.researchgate.net/publication/263021419_The_Planetary_and_Lunar_Ephemerides_DE430_and_DE431.
- [17] TIAN W. PETREL19: a new numerical solution of planetary and lunar ephemeris[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2023, 135(4): 38.
- [18] YANG Y, PING J, YAN J, et al. Comparison and analysis on lunar rotation with lunar gravity field models[J]. *Astrophysics and Space Science*, 2018, 363(9): 190.
- [19] 魏二虎, 任晓斌, 刘经南, 等. 利用LSTM网络预测月球物理天平动参数[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2022, 47(11): 1815-1822.
- [20] WEI E H, REN X B, LIU J N, et al. Prediction of lunar libration parameters using LSTM[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(11): 1815-1822.
- [21] 魏二虎, 李岩林, 黄逸丹, 等. 月球物理天平动参数的时变分析及精密预报[J]. *测绘地理信息*, 2024, 49(5): 8-13.
- [22] WEI E H, LIN Y L, HUANG Y D, et al. Time-varying analysis and precise prediction of lunar physical libration parameters[J]. *Journal of Geomatics*, 2024, 49(5): 8-13.
- [23] 田伟. 小行星(469219)Kamo'oalewa轨道的确定与误差分析[J]. *天文学报*, 2021, 62(2): 56-64.
- [24] TIAN W. Orbit determination of the Asteroid (469219) Kamo'oalewa and its error analysis[J]. *Acta Astronomica Sinica*, 2021, 62(2): 56-64.
- [25] MONTENBRUCK O, GILL E. *Satellite orbits*[M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2000.
- [26] PAVLOV D A, WILLIAMS J G, SUVORKIN V V. Determining parameters of Moon's orbital and rotational motion from LLR observations using GRAIL and IERS-recommended models[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2016, 126(1): 61-88.
- [27] 黄凯, 孙尚彪, 杨永章, 等. 月球激光测距观测模型的研究与应用[J]. *激光与光电子学进展*, 2022, 59(19): 187-193.
- [28] HUANG K, SUN S B, YANG Y Z, et al. Research and application of lunar laser ranging observation model[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2022, 59(19): 187-193.
- [29] 方振, 谷德峰, 邵凯, 等. 激光测月数据处理及月面角反射器坐标估计[J]. *深空探测学报(中英文)*, 2024, 11(5): 478-484.

FANG Z, GU D F, SHAO K, et al. LLR data processing and lunar retro-reflector coordinate estimation[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2024, 11(5): 478-484.

作者简介:

杨婉玲(2000-),女,博士生,主要研究方向:行星精密定轨及重力场计算。

通信地址:武汉大学测绘遥感信息工程国家重点实验室(430079)

E-mail: wanlingyang@whu.edu.cn

鄢建国(1980-),男,教授,博士生导师,主要研究方向:深空探测、行星重力场解算以及行星内部结构研究。本文通信作者。

通信地址:武汉大学测绘遥感信息工程国家重点实验室(430079)

E-mail: jgyan@whu.edu.cn

Lunar Orbit, Libration Modeling and LLR Data Application for High-precision Ephemeris

YANG Wanling¹, GAO Wutong¹, SU Wenjie¹, YAN Jianguo¹, PING Jinsong²

(1. State Key Laboratory of Surveying, Mapping and Remote Sensing Information Engineering, Wuhan University, Wuhan 430079, China;

2. National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100012, China)

Abstract: This study proposes a unified modeling and computational framework for lunar dynamics. Based on the weak-field approximation of general relativity, the framework systematically incorporates the major physical effects involved in orbital motion and dual-layer forced lunar libration, including gravitational perturbations from main-belt asteroids, the solar J_2 term, tidal deformation, and inertia tensor delay. It establishes a modular and highly consistent system by unifying dynamical derivations, reference frame definitions, and time system specifications. Using this framework, two-way Lunar Laser Ranging (LLR) data from 2015 to 2021 were processed, while the coordinates of lunar retroreflectors and terrestrial tracking stations were independently solved. The results show that the maximum deviation between the predicted orbit and the DE430 ephemeris along the Earth-Moon line is within 0.182 m, and the predicted error in physical libration Euler angles remains within 600 mas over 50 years. The post-fit root mean square (RMS) of one-way LLR residuals reaches 2.46 cm after reflector adjustment and 1.68 cm after ground station adjustment. This study demonstrates the physical consistency and practical adaptability of the unified modeling system, providing key technical support for the autonomous development of high-precision lunar ephemerides.

Keywords: lunar orbit prediction; libration prediction; lunar two-layer forced libration model; LLR data processing

Highlights:

- Proposes a unified modeling and procedural realization framework for lunar orbit and libration dynamics.
- Integrates major physical effects and standardizes dynamical modeling, reference frame, and time system across orbital and libration models.
- Achieves sub-meter accuracy in Earth-Moon line predictions and 600 mas level libration forecasts compared to the DE430 ephemeris.
- Independently processes 2015–2021 LLR data with post-fit residual RMS reaching 2.46 cm for reflectors and 1.68 cm for ground stations.
- Provides a technical foundation for high-precision LLR data processing and future independent lunar ephemeris development.

[责任编辑: 宋宏, 英文审校: 宋利辉]