

小天体着陆抗扰轨迹优化方法

朱轩廷, 刘延杰, 彭菲

(青岛科技大学 自动化与电子工程学院, 山东省深空自主着陆技术重点实验室, 青岛 266100)

摘要: 针对探测器着陆小天体过程中存在动力学参数和状态不确定问题, 提出了一种小天体着陆抗扰轨迹优化方法, 以提升复杂环境下探测器着陆控制精度。考虑不确定参数影响建立小天体着陆增广随机状态方程, 将小天体引力场的不确定性和探测器发动机推力误差作为着陆过程的过程噪声; 推导了不确定性沿标称轨迹传播的线性协方差动态方程, 将状态变量的协方差矩阵扩展为状态方程的新状态, 并构造燃料消耗和状态协方差加权的联合性能指标, 继而通过轨迹优化直接法进行最优控制问题解算, 以提高轨迹的抗扰能力。以433Eros为例进行仿真分析, 结果证明该方法能够克服随机参数对探测器的影响, 提高着陆精度。

关键词: 小天体着陆; 轨迹优化; 抗扰性; 线性协方差

中图分类号: V448.2

文献标识码: A

文章编号: 2096-9287(2025)01-0031-08

DOI: 10.15982/j.issn.2096-9287.2025.20240026

引用格式: 朱轩廷, 刘延杰, 彭菲. 小天体着陆抗扰轨迹优化方法[J]. 深空探测学报(中英文), 2025, 12(1): 31-38.

Reference format: ZHU X T, LIU Y J, PENG F. A desensitized trajectory optimization method for landing of small bodies[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2025, 12(1): 31-38.

引言

小天体探测对人类了解太阳系起源与演化、防御近地小天体撞击以及验证相关的深空探测技术有着重要意义^[1]。随着小天体探测任务的开展与任务要求不断提高, 在小天体表面软着陆已经成为主要的探测手段。

目前, 人类已经实施了多次小天体着陆探测任务, 包括美国国家航空航天局(National Aeronautics and Space Administration, NASA)在1996年实施的“近地小行星交会”(Near Earth Asteroid Rendezvous-shoemaker, NEAR shoemaker)任务, 利用探测器姿态控制发动机着陆于433Eros小天体表面, 此次任务为人类首次小天体着陆任务^[2]; 日本宇宙航空研究开发机构(Japan Aerospace Exploration Agency, JAXA)在2003年实施的“隼鸟号”(Hayabusa)任务为人类第一次实施的小天体采样返回任务, 于2010年返回地球; 欧洲航天局(European Space Agency, ESA)在2004年实施的“罗塞塔号”(Rosetta)任务为第一次彗星环绕与着陆任务, 接触彗星后在彗星表面多次弹跳并着陆在彗星表面; 日本的“隼鸟2号”(Hayabusa 2)

任务成功在小天体表面开展了跳跃移动实验并于2020年末采样返回, Hayabusa 2在与回收舱分离后飞往1998KY26小天体进行不采样探测; 美国的“奥西里斯号”(OSIRIS-REx)小天体采样返回任务于2023年9月携带样本返回地球, 带回了250 g样本, 并发现了丰富的有机物^[3]。同时, 中国也计划开展“天问二号”任务, 计划通过一次发射, 实现近地小天体采样返回, 之后, “天问二号”将前往一颗主带彗星进行探测^[4]。

小天体着陆轨迹的设计对探测器能否安全、准确到达预定的着陆地点起着至关重要的作用, 所设计的轨迹需要能够安全、准确地到达预定着陆点, 满足初始状态与终端状态约束、路径约束、控制约束等多重约束条件, 同时使某项重要的性能指标最优化, 如能耗、飞行时间等。

轨迹优化方法主要包括基于庞特里亚金极小值原理的间接法和基于参数化方法的直接法^[5]。间接法是通过庞特里亚金极小值原理将轨迹优化问题转换为两点边值问题, 引入协态变量, 并通过打靶法求解协态变量初值, 但由于协态变量没有实际物理意义, 协态初值难以获取, 针对该问题, 文献^[6]提出了一种轨迹优

收稿日期: 2024-04-27 修回日期: 2024-06-09

基金项目: 山东省自然科学基金项目(ZR2023MF006, ZR2023QF176); 空间碎片专项(KJSP2020020302); 科工局稳定支持项目(HTKJ2022KL502001)

化的快速同伦方法, 将燃料最优控制问题与光滑度高的能量最优控制问题通过同伦参数建立联系, 并求得了能量最优控制问题协态初值的近似解析解, 最后将能量最优控制问题逐步转换为燃料最优控制问题并求解。文献[7]则提出了一种基于深度神经网络的轨迹优化方法, 克服了在防碰撞路径约束下间接法求解困难问题。

直接法是将轨迹优化问题转换为多路径约束和边界约束下的参数优化问题, 然后通过求解非线性规划问题解决, 避免了协态初值的猜测^[8]。直接法的求解精度依赖于对控制变量和状态变量初值的猜测, 并且计算时间长^[9]。文献[10]提出的序列凸优化方法, 通过约束松弛、线性化、离散化将轨迹优化问题转换为可迭代求解二阶锥规划问题, 并用内点法求解, 求解精度高, 计算时间短。

然而, 实际任务中的航天器状态难以精确估计, 小天体动力学中的参数估计也会存在一定的误差^[11-12], 如果在设计着陆轨迹时不考虑这些不确定性的影响, 会导致实际轨迹极大的偏离标称轨迹。同时, 基于确定性模型设计的燃料最优轨迹符合bang-bang控制的形式, 即发动机从开启时就一直工作在其推力幅值的上、下限, 如果在存在参数不确定的情况下跟踪燃料最优轨迹, 反馈推力可能会超过允许的推力范围, 导致控制饱和, 这将导致在着陆的过程中缺乏足够的推力来纠正轨迹偏差^[13]。小天体质量、小天体自旋角速度、小天体引力场、探测器初始状态与发动机推力误差都会对着陆轨迹造成较大影响^[14]。针对深空探测任务中的不确定性问题, 文献[15]将状态变量的协方差矩阵纳入性能指标与路径约束中, 通过优化实现了火星大气进入终端高度最大化。对于小天体着陆问题, 文献[16]通过将闭环控制下的状态灵敏度矩阵纳入性能指标中进行优化, 降低了在闭环控制下小天体着陆对状态误差的灵敏度, 但是没有考虑由参数不确定性和发动机推力误差构成的过程噪声。

本文提出了一种小天体着陆抗扰轨迹优化方法。首先, 考虑不确定参数影响构造了小天体着陆增广随机状态方程, 将小天体引力场的不确定性和推力误差建模为着陆过程的过程噪声; 然后, 推导了不确定性沿轨迹传播的线性协方差动态方程, 将状态变量的协方差矩阵扩展为状态方程的新状态, 并构造燃料消耗和协方差加权的联合性能指标, 继而通过轨迹优化直接法进行最优控制问题解算, 以提高着陆过程的抗扰性。

1 小天体着陆随机动力学

1.1 着陆动力学与坐标系定义

以目标小天体质心为原点, 空间 x 、 y 、 z 3个坐标轴分别沿小天体三主轴方向, 建立小天体固连坐标系, 在小天体固连坐标系下的探测器着陆动力学方程可以表示为

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega^2 x + 2\omega\dot{y} + V_x + \frac{T_x}{m} \\ \ddot{y} = \omega^2 y - 2\omega\dot{x} + V_y + \frac{T_y}{m} \\ \ddot{z} = V_z + \frac{T_z}{m} \\ \dot{m} = -\frac{T}{I_{sp}g_0} \end{cases} \quad (1)$$

其中: x 、 y 、 z 分别为探测器的三轴位置; m 为探测器的质量; T_x 、 T_y 、 T_z 为三轴方向上的控制推力; T ($T_{\min} \leq T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2} \leq T_{\max}$)为发动机控制推力的大小; T_{\max} 、 T_{\min} 分别为发动机推力的最大和最小值; ω 为小天体的自旋角速度; I_{sp} 为探测器发动机的比冲量; g_0 地球海平面引力加速度; V_x 、 V_y 、 V_z 为三轴方向小天体引力势函数的一阶偏导, 本文小天体引力场计算采用多面体引力场模型^[17-18]。

为了便于表达, 可以将上述动力学方程表示为

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{T}, t) \quad (2)$$

其中: $\mathbf{X} = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ m]^T$; $\mathbf{T} = [T_x \ T_y \ T_z]^T$ 。

1.2 小天体着陆随机动力学方程

探测器在着陆小天体过程中存在的动力学参数不确定性都可以通过将不确定参数增广为状态方程的新状态, 通过分析状态协方差矩阵来衡量状态对于不确定参数与初始状态误差的灵敏度, 本文考虑小天体着陆参数不确定性为小天体引力场和自旋角速度、初始状态误差和推力误差, 将小天体引力场不确定性与发动机推力误差建模为过程噪声, 并将小天体自旋角速度扩展为状态方程的新状态。

将小天体着陆的确定性动力学方程(1)改写为如下随机动力学方程

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{T}, t) + \mathbf{W} \quad (3)$$

其中: \mathbf{W} 是由小天体引力场不确定性和推力误差所构成的服从高斯分布的过程噪声。引力场的不确定性可以表示为

$$\begin{cases} V_x = (1 + C_{V_x}\sigma_{V_x})V_{x,N} \\ V_y = (1 + C_{V_y}\sigma_{V_y})V_{y,N} \\ V_z = (1 + C_{V_z}\sigma_{V_z})V_{z,N} \end{cases} \quad (4)$$

其中: C_{V_x} 、 C_{V_y} 、 C_{V_z} 为服从标准正态分布的随机过程; σ_{V_x} 、 σ_{V_y} 、 σ_{V_z} 为小天体引力场的标准差; 下标 N 表示标称值, 即参数或变量的理论值。引力势函数一阶偏导的标称值由多面体引力场模型计算得到, 其计算与状态变量 $[x \ y \ z]^T$ 有关, 而其真实值则是由标称值经历上述服从高斯分布的随机过程得到。推力误差服从正态分布, 三轴方向上的推力分别表示为

$$\begin{cases} T_x = (1 + C_{T_x}\sigma_{T_x})T_{x,N} \\ T_y = (1 + C_{T_y}\sigma_{T_y})T_{y,N} \\ T_z = (1 + C_{T_z}\sigma_{T_z})T_{z,N} \end{cases} \quad (5)$$

其中: C_{T_x} 、 C_{T_y} 、 C_{T_z} 为服从标准正态分布的随机过程; σ_{T_x} 、 σ_{T_y} 、 σ_{T_z} 为推力误差的标准差。将小天体引力场的不确定性和推力误差作为着陆的过程噪声, 表达式为

$$\begin{cases} W_x = C_{V_x}\sigma_{V_x}V_{x,N} + \frac{C_{T_x}\sigma_{T_x}T_{x,N}}{m_N} \\ W_y = C_{V_y}\sigma_{V_y}V_{y,N} + \frac{C_{T_y}\sigma_{T_y}T_{y,N}}{m_N} \\ W_z = C_{V_z}\sigma_{V_z}V_{z,N} + \frac{C_{T_z}\sigma_{T_z}T_{z,N}}{m_N} \end{cases} \quad (6)$$

对于小天体自旋角速度的不确定性, 描述方式与式(4)、(5)相同, 表示为

$$\omega = (1 + C_\omega\sigma_\omega)\omega_N \quad (7)$$

其中: C_ω 为服从标准正态分布的随机过程; σ_ω 为小天体自旋角速度的标准差; ω_N 表示小天体自旋角速度的标称值。对于像 ω 这样在标称系统中为常值的参数, 文献[19]提供了一种将不确定性参数加入到状态协方差矩阵计算中的方法。

将系统的状态变量扩展为

$$\mathbf{X}_a = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ m \ \omega]^T \quad (8)$$

这样就可以把参数 ω 扩展为状态方程的状态变量, 并加入到状态协方差矩阵的计算中, 并且 $\dot{\omega} = 0$ 。

构造新的随机状态方程

$$\dot{\mathbf{X}}_a = \mathbf{f}_a(\mathbf{X}_a, \mathbf{T}, t) + \mathbf{W} \quad (9)$$

其中: $\mathbf{W} = [0 \ 0 \ 0 \ W_x \ W_y \ W_z \ 0 \ 0]^T$ 。

1.3 小天体着陆初始状态与终端状态约束

小天体着陆是指探测器从初始位置经过一段时间的飞行, 以零速度着陆小天体, 小天体着陆轨迹优化是在满足动力学方程、初始状态约束、终端状态约束的条件下, 对探测器的控制推力进行优化来实现对某一性能指标的最优化。

初始状态约束可以表示为

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \ y(t_0) = y_0, \ z(t_0) = z_0 \\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \ \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \ \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0 \\ m(t_0) = m_0 \end{cases} \quad (10)$$

终端状态约束可以表示为

$$\begin{cases} x(t_f) = x_f, \ y(t_f) = y_f, \ z(t_f) = z_f \\ \dot{x}(t_f) = 0, \ \dot{y}(t_f) = 0, \ \dot{z}(t_f) = 0 \\ m(t_f) \geq m_{\text{dry}} \end{cases} \quad (11)$$

其中: m_{dry} 为探测器的干质量, 即燃料耗尽时探测器的质量。

2 小天体着陆抗扰轨迹优化方法

小天体着陆环境存在不确定参数、初始状态误差和探测器发动机推力误差, 对此, 本节提出了一种小天体着陆抗扰轨迹优化方法。首先, 推导了不确定性沿标称轨迹传播的线性协方差动态方程, 然后将协方差矩阵扩展为状态方程的新状态, 并将状态协方差纳入性能指标中, 构造燃料消耗和协方差加权的联合性能指标, 继而能够通过优化实现在减小着陆误差的同时节省燃料。

2.1 协方差分析

对于标称轨迹对不确定性灵敏度的评估, 一种可行的方法是在标称轨迹设计完成后给定初始状态误差以及过程噪声进行蒙特卡洛仿真后对其统计学特征进行分析, 但是由于蒙特卡洛仿真计算量大、耗时长, 在优化过程中难以应用。然而, 对状态变量的线性协方差矩阵进行分析可以产生与蒙特卡洛仿真相似的效果^[20]。

状态变量的线性协方差矩阵可以用来衡量各状态变量之间的总体误差, 只要给定各状态变量协方差矩阵的初值以及过程噪声的自相关函数, 协方差矩阵就可以沿标称轨迹计算。

对于1.2节给出的随机系统(9), 其状态变量的协方差矩阵可以表示为

$$\mathbf{P} = E[(\mathbf{X}_a - E(\mathbf{X}_a))(\mathbf{X}_a - E(\mathbf{X}_a))^T] \quad (12)$$

由于式(9)中的过程噪声服从高斯分布, 有以下统计学性质

$$\begin{cases} E(\mathbf{W}) = 0 \\ E(\mathbf{W}(t)\mathbf{W}^T(\tau)) = \mathbf{R}(t)\delta(t-\tau) \end{cases} \quad (13)$$

其中: \mathbf{R} 为过程噪声的自相关函数; δ 为单位脉冲函数; \mathbf{W} 的期望值为零, 因此, 随机状态方程(9)中的状态变量的期望值等于其标称值

$$E(\mathbf{X}_a) = \mathbf{X}_{a,N} \quad (14)$$

所以随机系统 (9) 的状态变量协方差矩阵可以被重新定义为

$$\mathbf{P} = E[(\mathbf{X}_a - \mathbf{X}_{a,N})(\mathbf{X}_a - \mathbf{X}_{a,N})^T] = E(\delta\mathbf{X}_a\delta\mathbf{X}_a^T) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中: $\delta\mathbf{X}_a$ ($\delta\mathbf{X}_a = \mathbf{X}_a - \mathbf{X}_{a,N}$) 为状态变量的误差; σ_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) 为状态变量的标准差; n 为状态变量的长度; $-1 \leq \rho_{ik} \leq 1$ ($i, k = 1, 2, 3, \dots, n$) 为状态变量之间的相关系数。状态变量的线性协方差矩阵可沿标称轨迹由下式计算^[21]

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{G}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}^T + \mathbf{R} \quad (16)$$

其中: \mathbf{G} 为标称动力学方程的雅可比矩阵, 表达式为

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{f}_a}{\partial \mathbf{X}} \quad (17)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 2\omega & 0 & -T_x/m^2 & 2\omega x + 2\dot{y} \\ 0 & \omega^2 & 0 & -2\omega & 0 & 0 & -T_y/m^2 & 2\omega y - 2\dot{x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_z/m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由式 (17) 可知, 状态变量的协方差矩阵的计算依赖于标称轨迹的状态变量, 可以将状态变量的协方差矩阵塑造为状态方程的新状态, 并将协方差矩阵中的元素纳入到性能指标中, 在优化的过程中同时计算出状态变量的协方差矩阵, 通过优化使得状态变量的方差最小化, 继而减小着陆误差。

首先, 将状态协方差矩阵的元素扩展为状态方程的状态变量, 由于状态协方差矩阵为实对称矩阵, n 阶协方差矩阵仅有 $(n+1)n/2$ 个不相同元素, 扩展后的状态方程变为 $n+(n+1)n/2$ 维, 扩展后的状态变量为

$$\mathbf{X}_P = [\mathbf{X}_a^T \text{ (Vector}(\mathbf{P}))^T]^T \quad (18)$$

其中: $\text{Vector}(\mathbf{P})$ 为状态协方差矩阵右上三角元素的矢量形式, 之后将状态变量终端时刻的方差纳入性能指标中

$$J_0 = \sum_{i=1}^6 C_i \sigma_i^2 \quad (19)$$

其中: σ_i^2 ($i=1, 2, \dots, 6$) 为第 i 个状态变量终端时刻的

方差; C_i ($i=1, 2, \dots, 6$) 为分配各状态变量权重的权重系数。

通过将状态变量的协方差矩阵塑造为状态方程的状态, 并将终端时刻位置和速度的方差纳入到性能指标中, 通过求解出使性能指标 J_0 最小化的最优控制推力, 可以最小化终端时刻位置和速度的方差。

2.2 燃料消耗-协方差加权轨迹优化

在小天体着陆任务中, 燃料的携带与消耗都会增加任务成本, 为了限制成本, 可以将燃料消耗作为性能指标进行轨迹优化

$$J_1 = \int_0^{t_f} T_N dt \quad (20)$$

同时, 为了降低小天体着陆动力学不确定参数与初始状态误差对着陆轨迹的影响, 可以将燃料消耗与状态方差进行加权, 构成燃料消耗与状态协方差加权的联合性能指标, 通过解算如下抗扰轨迹优化问题, 可以在减小着陆误差的同时节省燃料

$$\begin{aligned} \min_{T_N} J &= c_0 J_0 + J_1 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_P = \mathbf{f}_P(\mathbf{X}_P, T_N, t) \\ \mathbf{X}_P(t_0) = \mathbf{X}_{P,0} \\ x(t_f) = x_f, y(t_f) = y_f, z(t_f) = z_f \\ \dot{x}(t_f) = 0, \dot{y}(t_f) = 0, \dot{z}(t_f) = 0 \\ m(t_f) \geq m_{\text{dry}} \\ T_{\min} \leq T_N = \sqrt{T_{x,N}^2 + T_{y,N}^2 + T_{z,N}^2} \leq T_{\max} \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

其中: 性能指标 J 为 Bolza 型 (即包含终端状态项与积分项); $\mathbf{X}_{P,0}$ 为状态变量 (式 (18)) 的初值; c_0 为分配燃料消耗和状态方差权重的权重系数, 当 $c_0=0$ 时仅考虑燃料消耗, 上述轨迹优化变为燃料最优控制问题。同理, 当 $c_0=+\infty$ 仅考虑状态变量的方差, 当 c_0 增大时, 优化将着重减小状态方差, 燃料消耗会增加。当某一状态变量的权重系数 C_i 增大时, 其终端时刻的方差减小, 而其余状态变量的终端时刻方差会相对增大。对于权重系数的选取, 需要根据实际任务需求来选取合适的 c_0 与 C_i 。

在给出上述轨迹优化问题后, 通过高斯伪谱法将轨迹优化问题转换为如下形式的非线性规划问题^[22]

$$\begin{aligned} \min F(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} h_1(\mathbf{x}) = 0, g_1(\mathbf{x}) \leq 0 \\ h_2(\mathbf{x}) = 0, g_2(\mathbf{x}) \leq 0 \\ \vdots \\ h_m(\mathbf{x}) = 0, g_p(\mathbf{x}) \leq 0 \\ \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T \in R^n \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

其中: $F(\mathbf{x})$ 为轨迹优化问题 (21) 经过高斯伪谱法转换后的非线性规划问题, $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ 为在 Legendre-Gauss (LG) 点进行离散化, 并利用 Lagrange 插值多项式对标称状态变量 \mathbf{X}_p 与标称控制变量 \mathbf{T}_N 进行全局近似; $h_i(\mathbf{x}) = 0 \ (i = 1, 2, \dots, m)$ 以及 $g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \ (j = 1, 2, \dots, p)$ 分别为转换后的等式约束与不等式约束, 且 $m \leq n$, 并假设 $F(\mathbf{x})$ 、 $h_i(\mathbf{x})$ 、 $g_j(\mathbf{x})$ 都足够光滑, 引入 Lagrange 乘子 $\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_m]^T$ 、 $\mu = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_p]^T$ 将约束极值问题 (22) 转换为无约束极值问题, 定义非线性规划问题 (22) 的 Lagrange 函数

$$L = F(\mathbf{x}) - \lambda \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mu \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (23)$$

其中: $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ 、 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 分别为式 (22) 中的等式约束与不等式约束, 当 \mathbf{x}^* 为非线性规划问题 (22) 的极小值点时, 应当满足如下最优解的一阶必要条件, 即 KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件

$$\begin{cases} \nabla_x L(\mathbf{x}^*) = \nabla_x F(\mathbf{x}^*) + \lambda \nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) + \mu \nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0 \\ \nabla_\lambda L(\mathbf{x}^*) = \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = 0 \\ \mu \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0, \mu \leq 0 \end{cases} \quad (24)$$

其中: 微分算子 $\nabla_x = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \ \frac{\partial}{\partial x_2} \ \dots \ \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^T$; $\nabla_\lambda = \left[\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \ \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \ \dots \ \frac{\partial}{\partial \lambda_m} \right]^T$ 。高斯伪谱法本质上将含有微分方程约束的连续实际最优控制问题转换为只含有代数方程约束的非线性规划问题, 并通过式 (24) 所示的 KKT 条件搜寻满足约束条件的极值点。

3 仿真结果及分析

本节以 433Eros 小行星为目标小天体进行仿真分析, 以验证该方法的可行性和有效性, 433Eros 小行星尺寸约为 $33 \times 13 \times 13 \text{ km}$, 标称角速度为 $3.314 \ 588 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$, 探测器发动机的最大推力为 80 N, 发动机比冲量为 225 s。本文使用 MATLAB 的 GPOPS-II 工具箱^[23], 通过高斯伪谱法将轨迹优化问题转换为非线性规划问题, 并用 SNOPT 求解器求解。仿真的边界条件如表 1 所示。

表 1 仿真边界条件

Table 1 Boundary conditions for simulations

时间	x/m	y/m	z/m	$v_x/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$v_y/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$v_z/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	m/kg
$t=0$	17 288	2 833	30 301	-2.11	-6.23	1.78	1 400
$t=t_f$	-3 244	140	5 579	0	0	0	—

由于小天体着陆环境存在参数不确定性和初始状态误差, 为了减小这种不确定性所带来的着陆误差, 本文提出的小天体着陆抗扰轨迹优化方法通过在性能指标中引入了状态变量的协方差矩阵, 构成了燃料消

耗和状态协方差加权的联合性能指标, 选取合适的 c_0 来调节燃料消耗与终端时刻状态方差的权重, 通过优化实现在减少燃料消耗的同时提高着陆过程抗扰性。小天体着陆过程的参数不确定性与初始状态误差如表 2 所示。

表 2 参数/状态不确定性

Table 2 Parameter/state uncertainty

参数/状态	分布	标准差或范围
推力误差	正态分布	0.5%
自旋角速度误差	正态分布	$\sqrt{1\% \omega_N}$
引力场误差	正态分布	15%
初始位置误差	均匀分布	[-1 1]
初始速度误差	均匀分布	[-0.1 0.1]

求解抗扰轨迹优化问题式 (21) 与燃料最优控制问题所得的三轴推力合力大小如图 1 所示, 此处抗扰轨迹优化问题所设置的 $c_0=100$ 。燃料最优轨迹的三轴推力合力大小呈现出 bang-bang 控制形式, 即三轴推力合力大小始终沿最大-最小-最大变化, 在跟踪燃料最优轨迹时容易造成推力饱和现象, 难以抑制误差, 在实际任务中无法直接应用。而本文提出的小天体着陆抗扰轨迹优化方法所得的抗扰最优轨迹并不始终处于推力合力大小的边界值, 推力大小变化曲线更为平滑, 在跟踪抗扰最优轨迹的过程中能够避免推力饱和, 抑制误差的产生。

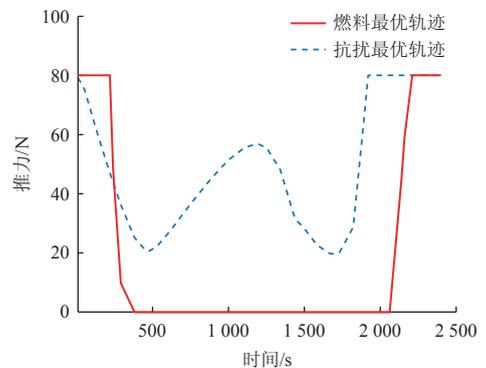


图 1 三轴推力合力大小

Fig. 1 Thrust in three axes and its net thrust

抗扰最优轨迹的三轴位置与速度如图 2、图 3 所示, 在无动力学参数不确定性与初始状态误差影响时, 探测器可以以零速度着陆在预定地点。探测器质量随时间的变化如图 4 所示, 抗扰最优轨迹的燃料消耗与燃料最优轨迹相比, 燃料消耗增加了 33.33 kg。

为了验证小天体着陆抗扰轨迹优化方法所得的抗扰最优轨迹对动力学参数不确定性和初始状态误差的抗干扰能力, 分别在开环控制和引入反馈制导控制的

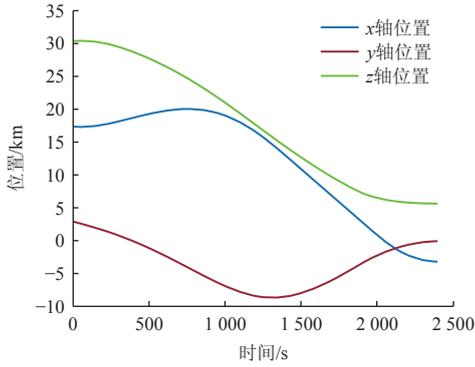


图2 探测器三轴位置
Fig. 2 Detector's o-xyz position

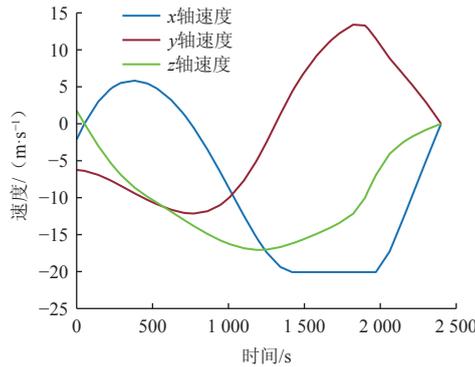


图3 探测器三轴速度
Fig. 3 Detector's o-xyz speed

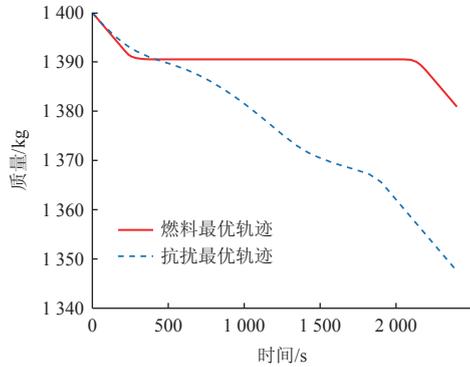


图4 探测器质量
Fig. 4 Mass of detector

情况下进行了蒙特卡洛仿真。开环控制下的蒙特卡洛仿真如图5所示,通过解算抗扰轨迹优化问题所求得的抗扰最优轨迹的着陆误差椭圆明显小于燃料最优轨迹的着陆误差椭圆,在开环控制下抗扰最优轨迹的抗扰效果明显,但由于未引入反馈制导控制,着陆误差依然达到了百米的数量级。同时,为了验证权重系数的选取对轨迹抗扰性能与燃料消耗的影响,统计了在不同权重系数下着陆位置的方差大小与燃料消耗情况。权重系数对抗扰性能的影响如表3所示,随着权重系数

c_0 的增大,着陆位置的方差逐渐减小,轨迹的抗扰性能提高。权重系数对燃料消耗的影响如图6所示,随着权重系数 c_0 的增大,燃料消耗增加。由此可见,更大的 c_0 使得优化着重提高轨迹的抗扰能力,但燃料消耗会增加。

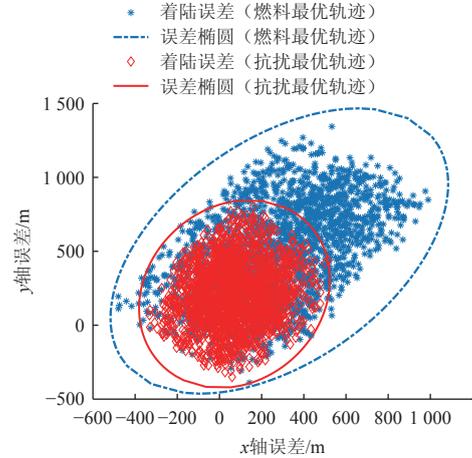


图5 开环控制下的着陆误差椭圆
Fig. 5 landing error ellipse under open loop control

表3 着陆位置方差

Table 3 Variance of landing position

c_0	$\sigma_x^2(t_f)/m^2$	$\sigma_y^2(t_f)/m^2$
0	1.45×10^6	3.99×10^6
10	1.91×10^5	2.07×10^6
50	1.36×10^5	1.51×10^6
100	1.29×10^5	1.42×10^6

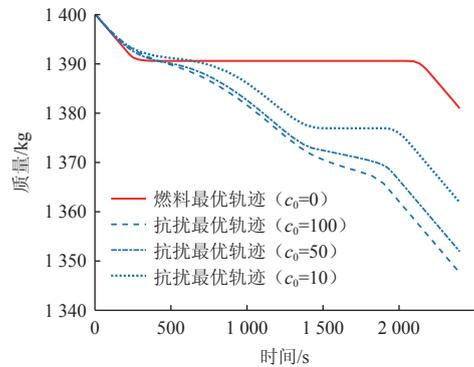


图6 不同 c_0 下的燃料消耗
Fig. 6 fuel consumption at different c_0

基于线性二次型调器设计的反馈制导控制下跟踪抗扰最优轨迹的着陆误差椭圆如图7所示,在反馈制导控制下,着陆精度达到了米级,并且随着跟踪制导周期的缩短,着陆精度进一步提高。图8为跟踪制导控制下跟踪抗扰轨迹的着陆速度统计,最终着陆速度均小于0.1 m/s,满足小天体着陆任务的精度要求。

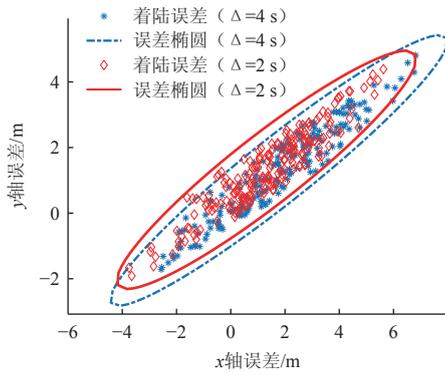


图 7 反馈制导控制下的着陆误差椭圆

Fig. 7 Landing error ellipse under feedback guidance control

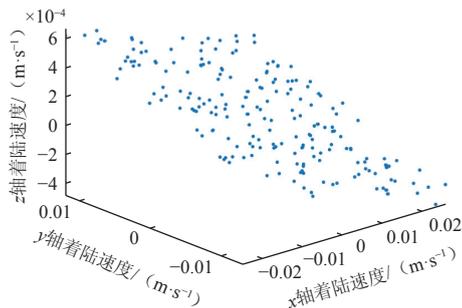


图 8 反馈制导控制下的着陆速度

Fig. 8 Landing speed under feedback guidance control

4 结 论

针对深空环境下动力学参数和探测器状态难以精确估计的问题, 提出了一种小天体着陆抗扰轨迹优化方法。

该方法考虑了小天体着陆动力学参数和初始状态不确定对着陆精度的影响, 推导了不确定沿标称轨迹传播的线性协方差矩阵动态方程, 构造了燃料消耗与协方差加权的联合性能指标, 通过轨迹优化直接法进行最优控制问题解算, 提高了着陆过程的抗扰性。以433Eros为算例的仿真结果表明, 该方法在开环控制和反馈制导控制下可以有效降低由不确定性引起的着陆误差。

参 考 文 献

[1] 崔平远, 赵冬越, 朱圣英, 等. 小天体主动附着制导与控制技术研究进展[J]. 宇航学报, 2021, 42(9): 1057-1066.
CUI P Y, ZHAO D Y, ZHU S Y, et al. Research progress of guidance and control technology for active landing of small celestial bodies[J]. Journal of Astronautics, 2021, 42(9): 1057-1066.

[2] 黄翔宇, 徐超, 郭敏文. 地外天体软着陆自主导航与控制技术研究进展[J]. 深空探测学报(中英文), 2024, 11(1): 3-15.
HUANG X Y, XU C, GUO M W. Research progress of autonomous navigation and control technology for extraterrestrial soft landing[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2024, 11(1): 3-15.

[3] OBA Y, TAKANO Y, DWORKIN J P, et al. Ryugu asteroid sample return provides a natural laboratory for primordial chemical evolution[J]. Nature Communications, 2023, 14(1): 3107.

[4] 曾祥远, 温童歌, 李姿雯. 小天体着陆动力学研究进展[J]. 中国科学: 技术科学, 2024, 54: 761-785.
ZENG X Y, WEN T G, LI Z W. Recent development of landing dynamics over small celestial bodies[J]. Science in China: Technical Sciences, 2024, 54: 761-785.

[5] GE D, CUI P, ZHU S. Recent development of autonomous GNC technologies for small celestial body descent and landing[J]. Progress in Aerospace Sciences, 2019, 110: 100551.

[6] YANG H, LI S. Fast homotopy method for asteroid landing trajectory optimization using approximate initial costates[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2019, 42(3): 585-597.

[7] ZHAO Y, YANG H, LI S. Real-time trajectory optimization for collision-free asteroid landing based on deep neural networks[J]. Advances in Space Research, 2022, 70(1): 112-124.

[8] 崔平远, 龙嘉腾, 朱圣英, 等. 行星着陆轨迹优化技术研究进展[J]. 宇航学报, 2021, 42(6): 677-686.
CUI P Y, LONG J T, ZHU S Y, et al. Research progress of planetary landing trajectory optimization techniques[J]. Journal of Astronautics, 2021, 42(6): 677-686.

[9] 姚晗敏, 齐瑞云. 火星着陆器进入段轨迹优化与制导研究进展[J]. 航天控制, 2021, 39(4): 3-12.
YAO H C, QI R Y. A research progress of trajectory optimization and guidance for mars lander[J]. Aerospace Control, 2021, 39(4): 3-12.

[10] 刘延杰, 朱圣英, 崔平远. 序列凸优化的小天体附着轨迹优化[J]. 宇航学报, 2018, 39(2): 177-183.
LIU Y J, ZHU S Y, CUI P Y. Soft landing trajectory optimization on asteroids by convex programming[J]. Journal of Astronautics, 2018, 39(2): 177-183.

[11] 陈友, 郭金融, 刘延杰, 等. 融合相机和激光雷达的小天体运动状态估计方法[J]. 深空探测学报(中英文), 2024, 11(1): 63-70.
CHEN Y, GUO J R, LIU Y J, et al. A method for estimating motion state of small bodies based on fusion of camera and LIDAR[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2024, 11(1): 63-70.

[12] 姚文龙, 刘毅, 邵巍, 等. 小天体地形动态模拟与着陆视觉仿真系统设计[J]. 深空探测学报(中英文), 2022, 9(4): 427-437.
YAO W L, LIU Y, SHAO W, et al. Design of terrain dynamic simulation and landing view simulation system for small celestial bodies[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2022, 9(4): 427-437.

[13] CUI P, ZHANG C, LIANG Z. Closed-loop guidance for asteroid landing using stability-related control and three-dimensional convex curvature constraints[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2023, 59(3): 2807-2822.

[14] 袁旭, 朱圣英, 乔栋, 等. 小天体着陆动力学参数不确定性影响分析[J]. 深空探测学报(中英文), 2014, 1(2): 134-139.
YUAN X, ZHU S Y, QIAO D, et al. Impact analysis of dynamic parameters uncertainty on small celestial body landing[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2014, 1(2): 134-139.

[15] CUI P, ZHAO Z, YU Z, et al. Terminal altitude maximization for Mars entry considering uncertainties[J]. Acta Astronautica, 2018, 145: 446-455.

[16] 胡海静, 高艾, 朱圣英, 等. 考虑跟踪制导的小天体着陆轨迹闭环优化方法[J]. 宇航学报, 2015, 36(12): 1384-1390.

- HU H J, GAO A, ZHU S Y, et al. Closed-loop trajectory optimization for precision landing on small bodies considering tracking guidance[J]. *Acta Astronautica Sinica*, 2015, 36(12): 1384-1390.
- [17] ROBERT A, WERNER-DANIEL J. Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1996, 65(3): 313-344.
- [18] 尚海滨, 韦炳威, 卢桦承. 小天体引力场建模技术进展[J]. *深空探测学报(中英文)*, 2022, 9(4): 359-372.
- SHANG H B, WEI B H, LU J C. Recent advances in modeling gravity field of small bodies[J]. *Journal of Deep Space Exploration*, 2022, 9(4): 359-372.
- [19] SEYWALD H, SEYWALD K L. Desensitized optimal control[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2024, 47(8): 1542-1555.
- [20] GELLER, DAVID K. Linear covariance techniques for orbital rendezvous analysis and autonomous onboard mission planning[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2006, 29(6): 1404-1414.
- [21] TODD V S. Optimal trajectory-shaping with sensitivity and covariance techniques[D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2010.
- [22] 袁旭, 朱圣英. 基于伪谱法的小天体最优下降轨迹优化方法[J]. *深空探测学报(中英文)*, 2016, 3(1): 51-55.
- YUAN X, ZHU S Y. Small body descent trajectory optimization based on pseudospectral method[J]. *Journal of Deep Space Exploration*, 2016, 3(1): 51-55.
- [23] PATTERSON, MICHAEL A, ANIL V R. GPOPS-II: a MATLAB software for solving multiple-phase optimal control problems using hp-adaptive Gaussian quadrature collocation methods and sparse nonlinear programming[J]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 2014, 41(1): 1-37.
- 作者简介:
朱轩廷(2000-), 男, 硕士生, 主要研究方向: 飞行器导航、制导与控制。
 通信地址: 青岛市崂山区松岭路99号, 青岛科技大学自动化学院(266100)
 E-mail: 519907088@qq.com
刘延杰(1988-), 男, 副教授, 本文通信作者, 主要研究方向: 飞行器导航、制导与控制。
 通信地址: 青岛市崂山区松岭路99号, 青岛科技大学自动化学院(266100)
 E-mail: lyj8760rus@qust.edu.cn

A Desensitized Trajectory Optimization Method for Landing of Small Bodies

ZHU Xuanting, LIU Yanjie, PENG Fei

(Shandong Key Laboratory of Autonomous Landing for Deep Space Exploration, College of Automation & Electronic Engineering, Qingdao University of Science & Technology, Qingdao 266100, China)

Abstract: A desensitized trajectory optimization method was proposed to improve the precision of small body landing control in complex environments, under the influence of the uncertainty of dynamic parameters and state during small body landing. Firstly, considering the influence of uncertain parameters, the augmented stochastic state equation of small body landing was established, and the uncertainty of the gravitational field of small body and the thrust error of probe engine were regarded as the process noise of landing process. Then, the linear covariance dynamic equation of uncertainty propagating along the nominal trajectory was derived, the covariance matrix of state variables was extended to a new state of the state equation, and the joint performance index weighted by fuel consumption and state covariance was constructed. Then the optimal control problem was solved by direct trajectory optimization method and the trajectory's desensitization was finally improved. Taking 433Eros as an example, the simulation results show that the proposed method can overcome the influence of random parameters in the process of small body landing and improve landing accuracy.

Keywords: small body landing; trajectory optimization; desensitization; linear covariance

Highlights:

- A desensitized trajectory optimization method for landing of small bodies is proposed.
- The stochastic dynamics equation for small body landing has been established, and process noise has been modeled accordingly.
- The dynamic equation of the state covariance matrix is derived, and by incorporating it into performance metrics, a trajectory optimization problem that balances fuel consumption and covariance weighting is formed.

[责任编辑: 宋宏, 英文审校: 宋利辉]