

# 基于系统可观测性分析的小天体运动状态估计

邓润然<sup>1,2</sup>, 王大轶<sup>2</sup>, 葛东明<sup>2</sup>, 郑伟<sup>1</sup>, 鄂薇<sup>2</sup>, 邹元杰<sup>2</sup>, 李嘉兴<sup>2</sup>

(1. 国防科技大学 空天科学学院, 长沙 410199; 2. 北京空间飞行器总体设计部, 北京 100094)

**摘要:** 小天体属于无标识、无通信且一般处于翻滚运动状态的空间非合作目标, 这使得对其运动状态与参数估计变得极具挑战性。证明了仅用单目序列图像对于空间非合作目标姿态运动的角速度、惯性比等参数是完全可观测的, 并实现了非合作目标姿态运动与惯量比等参数估计, 并通过数学仿真验证了该方法的有效性。

**关键词:** 小天体; 非合作; 单目序列图像; 可观测性; EKF滤波估计

**中图分类号:** V448.25

**文献标识码:** A

**文章编号:** 2096-9287(2024)06-0570-08

**DOI:** 10.15982/j.issn.2096-9287.2024.20240032

**引用格式:** 邓润然, 王大轶, 葛东明, 等. 基于系统可观测性分析的小天体运动状态估计[J]. 深空探测学报(中英文), 2024, 11(6): 570-577.

**Reference format:** DENG R R, WANG D Y, GE D M, et al. Estimation of motion state of small celestial bodies based on system observability analysis[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2024, 11(6): 570-577.

## 引 言

小天体附着与采样探测是人类探索太阳系起源、行星演化等科学问题的重要环节, 但小天体具有无标识、无通信且一般处于翻滚运动状态的非合作特性, 属于典型的空间非合作目标, 因此, 实现小天体非合作目标的自主导航是保证附着与采样成功实施的关键前提。与合作目标相比, 空间非合作目标具有无先验知识、无合作标识和无通信等典型特征, 如何通过非接触方式获取目标的姿态、角速度和惯性比等参数是空间非合作目标自主导航的重要研究内容。

为解决上述问题, 相关特定任务的航天器通过配置微波雷达、激光雷达、光学相机等导航传感器, 采用基于多源信息融合的自主导航方法进行目标运动估计, 王大轶等<sup>[1-2]</sup>针对深空天体这类非合作目标, 对基于多源信息融合的航天器自主导航方法开展了大量研究工作, Aghili等<sup>[3-4]</sup>研究了基于激光与视觉测量的翻滚目标运动状态和参数卡尔曼滤波估计方法; Volpe等<sup>[5]</sup>将单目光学图像与测距信息融合, 通过无迹卡尔曼滤波(Unscented Kalman Filter, UKF)实现了目标状态估计; 但由于融合结构和滤波算法复杂, 受制于星上资源的严苛约束, 很难实现真正意义上的多源信息融合。而作为航天器标准配置的光学传感器, 其获取的序列图像具有全程适用、信息丰富等特点, 是进行空

间非合作目标自主导航的理想信息来源。因此, 部分学者研究了基于立体视觉的空间目标自主导航方法, 如Shtark等<sup>[6-7]</sup>基于立体视觉实现了非合作目标相对位置和速度的测量估计方法; Pesce等<sup>[8]</sup>研究了基于立体视觉的非合作目标姿态、运动和惯量比的测量估计方法; 葛东明等<sup>[9]</sup>以立体视觉对3个非共线特征点测量, 通过扩展卡尔曼滤波(Extended Kalman Filter, EKF)实现了空间非合作目标的运动状态估计与参数辨识。但立体视觉系统性能与测量系统的基线尺寸制约异常敏感, 而单目相机结构简单、质量小、功耗和经济成本低, 和立体视觉系统相比, 其工作范围更远, 并且不存在基线尺寸约束, 此外目前常规航天器都配备光学传感器, 若能利用单目视觉实现空间非合作目标的运动估计与参数辨识将简化导航系统的配置方案, 并有望普遍提升航天器自主导航能力。

针对仅用光学图像进行小天体探测近距离自主导航这一问题, 美国“好奇号”(Curiosity)<sup>[10]</sup>和“毅力号”(Perseverance)<sup>[11]</sup>火星探测器采用了基于着陆区地形模型的图像匹配的单目视觉导航技术, 这种方法依赖天体地形模型的信息, 并且融合了雷达测距信息; 美国“欧西里斯”(OSIRIS-REx)小行星探测器通过光学相机图像与探测器已有行星表面全景地图进行特征匹配, 实现自然特征跟踪(Natural Feature Tracking,

NFT)<sup>[12]</sup>; 日本“隼鸟1号”(Hayabusa 1)<sup>[13]</sup>和“隼鸟2号”(Hayabusa 2)<sup>[14]</sup>在附着段通过投放发光合作标志球到小天体表面, 利用单目光学相机实现相对位置测量, 该方法相当于在天体表面施放已知标志; Wokes等<sup>[15]</sup>基于小天体半径已知这一前提, 实现了基于3个陨石坑对探测器位姿进行自主估计; 徐超等<sup>[1]</sup>提出了一种基于光学序列图像和惯性测量单元的无需先验信息的小天体着陆过程状态估计方法; 文献[16-17]证明了通过轨道机动或相机偏置安装可保证位置相关状态是完全可观的; Dong等<sup>[18]</sup>针对仅用单目序列图像的航天器自主导航问题, 发展了系统可观性理论; 但这些方法通常仅针对天体相对位置或位姿联合估计问题, 在估计方法中引用了先验信息或标识信息, 通过建立目标主轴坐标系, 最终基于轨道机动或相机偏置安装条件实现全部状态的滤波估计, 但是轨道机动将耗费探测器的推进剂资源并延长任务时间, 而相机偏置受限于探测器安装尺寸约束, 在远距离时精度将大大降低。

本文针对小天体姿态运动估计与参数辨识问题, 提出了一种基于单目序列图像测量的非合作目标运动估计与参数辨识方法, 在光照满足相机观测条件情况下, 该方法以单目相机序列图像获取的目标姿态四元数为测量信息, 四元数姿态描述可有效避免欧拉角存在奇异点的问题, 在无需其它测量传感器及天体先验信息情况下, 证明了以单目图像为测量信息情况下, 对于目标姿态、角速度及惯量比等状态估计, 系统是完全可观的, 并进一步给出了以初始观测时刻为基准的目标姿态、角速度及惯量比等参数的EKF滤波估计算法, 最后通过数学仿真验证了方法有效性。

## 1 单目相机观测模型

对于空间非合作目标, 设坐标系 $O_w-X_wY_wZ_w$ 为目标本体固连坐标系,  $t_1$ 、 $t_2$ 时刻空间非合作目标点 $P$ 在目标本体固连坐标系的 $(X_w Y_w Z_w)$ , 如图1所示。

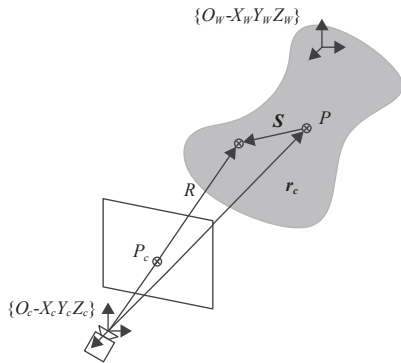


图1 空间非合作目标单目相机观测示意图

Fig. 1 Schematic diagram of monocular camera observation of non-cooperative targets in space

设定坐标系 $O_c-X_cY_cZ_c$ 为单目相机连体坐标系, 单目相机在 $t_1$ 、 $t_2$ 观测空间非合作目标点 $P$ , 其在 $O_c-X_cY_cZ_c$ 坐标系描述的空间位置:  $(X_{c1} Y_{c1} Z_{c1})$ 、 $(X_{c2} Y_{c2} Z_{c2})$ , 两个时刻的 $O_c-X_cY_cZ_c$ 相对 $O_w-X_wY_wZ_w$ 坐标系的转动姿态矩阵为 $R_1$ 、 $R_2$ , 平移矢量为 $T_1$ 、 $T_2$ ,  $O_c-X_cY_cZ_c$ 坐标系从 $t_1$ 时刻到 $t_2$ 时刻的旋转矩阵为 $R_{\Delta 1}$ , 平移矢量为 $T_{\Delta 1}$ 。

$$\begin{bmatrix} X_{c1} \\ Y_{c1} \\ Z_{c1} \end{bmatrix} = R_1 \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{bmatrix} + T_1 \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} X_{c2} \\ Y_{c2} \\ Z_{c2} \end{bmatrix} = R_2 \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{bmatrix} + T_2 \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} X_{c2} \\ Y_{c2} \\ Z_{c2} \end{bmatrix} = R_{\Delta 1} \begin{bmatrix} X_{c1} \\ Y_{c1} \\ Z_{c1} \end{bmatrix} + T_{\Delta 1} \quad (3)$$

将式(1)和式(2)代入式(3), 得

$$\left( R_2 \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{bmatrix} + T_2 \right) = R_{\Delta 1} \left( R_1 \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{bmatrix} + T_1 \right) + T_{\Delta 1} \quad (4)$$

进一步, 由式(4)得到

$$\begin{cases} R_2 = R_{\Delta 1} R_1 \\ T_2 = T_{\Delta 1} + R_{\Delta 1} T_1 \end{cases} \quad (5)$$

空间相对导航目标在 $t_1$ 、 $t_2$ 时刻所拍摄图像内像素位置为 $(u_1 v_1)$ 、 $(u_2 v_2)$ , 图像像素原点位置为 $(u_0 v_0)$ ; 设相机内参数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} f_x & 0 & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中:  $f_x = \frac{f}{da}$  与  $f_y = \frac{f}{db}$   $f$  为相机焦距;  $da$  与  $db$  为像平面单个像元两个方向的尺寸, 建立含内参数矩阵 $t_1$ 、 $t_2$ 时刻相机成像的数学模型为

$$Z_{c1} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{c1} \\ Y_{c1} \\ Z_{c1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$Z_{c2} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{c2} \\ Y_{c2} \\ Z_{c2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

将式(6)和式(7)代入式(3), 并与式(5)共同组成单目相机的空间非合作目标观测数学模型。

$$\begin{cases} X_{c1} = \frac{Z_{c1} \times a_1}{f_x} \\ Y_{c1} = \frac{Z_{c1} \times b_1}{f_y} \\ Z_{c1} = \frac{f_x f_y (f_x t_x - a_2 t_z)}{a_2 (f_y r_7 a_1 + f_x r_8 b_1 + r_9 f_x f_y) - f_x (f_y r_1 a_1 + f_x r_2 b_1 + r_3 f_x f_y)} \\ \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_{\Delta 1} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_{\Delta 1} + \mathbf{R}_{\Delta 1} \mathbf{T}_1 \end{cases} \quad (8)$$

其中:  $a_1 = u_1 - u_0$ ;  $b_1 = v_1 - v_0$ ;  $a_2 = u_2 - u_0$ ;

$$[\mathbf{R}_{\Delta 1} \quad \mathbf{T}_{\Delta 1}] = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & t_x \\ r_4 & r_5 & r_6 & t_y \\ r_7 & r_8 & r_9 & t_z \end{bmatrix}$$

通过单目相机对目标观测拍摄并构建序列图像,对两幅相邻的序列图像进行特征提取与匹配,可配准得到 $\mathbf{R}_{\Delta 1}$ 和 $\mathbf{T}_{\Delta 1}$ ;假定初始时刻目标的相机系 $O_c - X_{c1} Y_{c1} Z_{c1}$ 与目标本体固连坐标系 $O_c - X_w Y_w Z_w$ 平行,即为单位阵,那么根据式(8)得到任意 $t$ 时刻 $O_c - X_{c1} Y_{c1} Z_{c1}$ 与 $O_c - X_w Y_w Z_w$ 的姿态矩阵为每两帧图像间隔时间内 $\mathbf{R}_{\Delta i}$ 的叠乘,即

$$\mathbf{R}_t = \Pi \mathbf{R}_{\Delta t} \cdots \mathbf{R}_{\Delta 2} \mathbf{R}_{\Delta 1} \quad (9)$$

定义 $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]^T$ 为任意时刻相机坐标系到目标本体坐标系的姿态四元数,其中 $q_4$ 为标量且 $|\mathbf{q}| = 1$ ;那么有

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = (2q_4^2 - 1)\mathbf{I}_3 + 2\mathbf{q}_v \mathbf{q}_v^T - 2q_4 \tilde{\mathbf{q}}_v \quad (10)$$

其中:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v \\ q_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_v = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_v = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2 系统可观测性分析

初始时刻确定与相机系平行且固连于目标的本体坐标系,作为目标姿态的测量基准,由于自身的观测基准已知,所以必然可得到目标状态相对惯性空间的表示,为简化问题分析,可将相机系定在惯性空间,获取目标任意时刻相对初始时刻的姿态四元数作为唯一测量信息,进一步定义如下物理量,描述目标状态与参数。

目标的姿态运动学方程为

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^q \mathbf{q} \quad (11)$$

$$\text{其中: } \boldsymbol{\omega}^q = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix}$$

空间目标自由状态下姿态动力学方程为

$$\mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (12)$$

$$\text{其中: } \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \frac{1}{J_{zz}} \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{xy} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{xz} & L_{yz} & 1 \end{bmatrix},$$

那么有

$$\mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = J_{zz} (\mathbf{L} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{L} \boldsymbol{\omega}) = 0 \quad (13)$$

因此惯量比相同的空间自由目标,它们具有相同的姿态运动特性,且仅相差一个尺度因子,提取 $J_{zz}$ 为尺度因子后的姿态动力学方程即

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\mathbf{L}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{L} \boldsymbol{\omega} \quad (14)$$

考虑四元数模为1的约束条件,确定系统状态量为

$$\mathbf{X} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z \quad L_{xx} \quad L_{yy} \quad L_{xy} \quad L_{xz} \quad L_{yz}]^T \quad (15)$$

联立姿态运动学与动力学方程,且目标本体坐标系惯量矩阵为常量,即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^q \otimes \mathbf{q} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} = -\mathbf{L}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{L} \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{j}} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

状态方程即为

$$\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^q \otimes \mathbf{q} \\ -\mathbf{L}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{L} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

测量模型为

$$\mathbf{Y} = h(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (18)$$

由微分几何理论可知, $h(\mathbf{X})$ 沿 $f(\mathbf{X})$ 的各阶李导数为

$$\begin{cases} L_f^0 h(\mathbf{X}) = h(\mathbf{X}) \\ L_f^k h(\mathbf{X}) = \frac{\partial L_f^{k-1} h(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} f(\mathbf{X}), \quad k = 1, 2, \dots \\ dL_f^k h(\mathbf{X}) = \frac{\partial L_f^k h(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (19)$$

Hermann等<sup>[19-20]</sup>给出了非线性系统局部弱可观的秩判据

$$Q_k(X) = \begin{bmatrix} dL_f^0 h(X) \\ dL_f^1 h(X) \\ \vdots \\ dL_f^k h(X) \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中:  $\dim(X) = n$ ,  $k \leq n-1$ 。

根据非线性系统局部弱可观性理论, 当低阶李导数构成的可观性矩阵不满足秩判据时, 需引入系统的高阶李导数进行分析, 并以此递推直到满足可观性判据为止, 当递推至  $n-1$  阶李导数时仍不满足可观性秩判据时, 系统在状态  $X$  处不可观, 否则当  $\text{rank}(Q_k(X)) = n$  时, 系统在  $X$  处为局部弱可观。

将式 (15) 和式 (16) 代入式 (17) 与式 (18), 且当  $\dot{\omega} = -L^{-1}\tilde{\omega}L\omega \neq 0$ , 角加速度不恒等于0时, 计算得到

$$\text{rank}(Q_4(X)) = \text{rank} \begin{pmatrix} dL_f^0 h(X) \\ dL_f^1 h(X) \\ dL_f^2 h(X) \\ dL_f^3 h(X) \\ dL_f^4 h(X) \end{pmatrix} = 11 = \dim(X) \quad (21)$$

而当  $\dot{\omega} = -L^{-1}\tilde{\omega}L\omega \equiv 0$  时, 由于  $L^{-1}$  必为常量矩阵, 可以得到

$$\tilde{\omega}L\omega \equiv 0 \quad (22)$$

其中:  $H = L\omega$  为目标角动量, 式 (22) 即表示  $\tilde{\omega} \cdot H \equiv 0$ , 即目标将维持自旋运动状态, 此时对于系统局部弱可观的秩判据为

$$\text{rank}(Q_{11}(X)) = \text{rank} \begin{pmatrix} dL_f^0 h(X) \\ dL_f^1 h(X) \\ \vdots \\ dL_f^{11} h(X) \end{pmatrix} < 11 = \dim(X) \quad (23)$$

因此可以证明, 当空间目标处于自由章动运动状态时, 通过目标姿态四元数的测量, 对于目标姿态、角速度、惯量比是可观的; 而当目标处于自旋运动状态时系统不可观。

### 3 系统EKF滤波方程构建

#### 3.1 测量方程的线性化

对于姿态动力学方程  $\dot{\omega} = -L^{-1}\tilde{\omega}L\omega$ , 首先, 通过雅克比矩阵获得姿态动力学方程差分形式为

$$\delta\dot{\omega} = M\delta\omega + N\delta l \quad (24)$$

$$\text{其中: } M = -\frac{\partial(L^{-1}\tilde{\omega}L\omega)}{\partial\omega}; N = -\frac{\partial(L^{-1}\tilde{\omega}L\omega)}{\partial l}; l = [L_{xx} \ L_{yy} \ L_{xy} \ L_{xz} \ L_{yz}]^T。$$

对于姿态运动方程, 由于四元数的乘性规律, 运动学方程 (11) 的扰动表达式推导如下。

首先, 四元数的差分运算为

$$q = \begin{bmatrix} -\delta\tilde{q}_v + \delta q_4 I_3 & \delta q_v \\ -\delta q_v^T & \delta q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}_v \\ \hat{q}_4 \end{bmatrix} = \delta q \otimes \hat{q} \quad (25)$$

$$\text{对式 (25) 求导得: } \dot{q} = \delta\dot{q} \otimes \hat{q} + \delta q \otimes \dot{\hat{q}} \quad (26)$$

那么:

$$\dot{q} = \delta\dot{q} \otimes \hat{q} + \delta q \otimes \dot{\hat{q}} = \frac{1}{2}\omega^q \otimes q \quad (27)$$

各项分别右乘  $\hat{q}^{-1} = \begin{bmatrix} -\hat{q}_v \\ \hat{q}_4 \end{bmatrix}$ , 且

$$\hat{q} \otimes \hat{q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{q} &= -\delta q \otimes \dot{\hat{q}} \otimes \hat{q}^{-1} + \frac{1}{2}\omega^q \otimes q \otimes \hat{q}^{-1} = \\ &= -\frac{1}{2}\delta q \otimes \dot{\omega}^q \otimes \hat{q} \otimes \hat{q}^{-1} + \frac{1}{2}[\dot{\omega}^q + \delta\omega^q] \otimes \delta q \otimes \hat{q} \otimes \hat{q}^{-1} = \\ &= -\frac{1}{2}\delta q \otimes \dot{\omega}^q + \frac{1}{2}\dot{\omega}^q \otimes \delta q + \frac{1}{2}\delta\omega^q \otimes \delta q \end{aligned} \quad (29)$$

$$\text{有近似: } \delta q \approx \begin{bmatrix} \delta q_v \\ 1 \end{bmatrix}$$

忽略二阶小量,  $\delta\dot{q}$  展开并化简, 得到姿态运动学方程差分形式为

$$\begin{aligned} \delta\dot{q} &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\delta\tilde{q}_v + \delta q_4 I_3 & \delta q_v \\ -\delta q_v^T & \delta q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\tilde{\omega} & \tilde{\omega} \\ -\tilde{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \delta q_v \\ \delta q_4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\delta\tilde{\omega} & \delta\omega \\ -\delta\omega^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_v \\ \delta q_4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\delta\tilde{q}_v \hat{\omega} - \frac{1}{2}\delta q_4 \hat{\omega} - \frac{1}{2}\tilde{\omega} \delta q_v + \frac{1}{2}\tilde{\omega} \delta q_4 - \frac{1}{2}\delta\tilde{\omega} \delta q_v + \frac{1}{2}\delta\omega \delta q_4 \\ -\frac{1}{2}\delta\omega^T \delta q_v \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\tilde{\omega} \delta q_v - \frac{1}{2}\delta\tilde{\omega} \delta q_v + \frac{1}{2}\delta\omega \delta q_4 \\ -\frac{1}{2}\delta\omega^T \delta q_v \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -\tilde{\omega} \delta q_v + \frac{1}{2}\delta\omega \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

得到系统线性化的运动学与动力学方程为

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{q}} \approx \begin{bmatrix} -\tilde{\omega} \delta \mathbf{q}_v + \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \delta \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{M} \delta \boldsymbol{\omega} + \mathbf{N} \delta l \end{cases} \quad (31)$$

定义状态变量

$$\mathbf{X} = [\mathbf{q}_v \quad \boldsymbol{\omega} \quad l]^T \quad (32)$$

系统最终线性化状态方程为

$$\delta \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{C} \delta \mathbf{X} \quad (33)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\tilde{\boldsymbol{\omega}} & \frac{1}{2} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 5} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{M} & \mathbf{N} \\ \mathbf{0}_{5 \times 3} & \mathbf{0}_{5 \times 3} & \mathbf{0}_{5 \times 5} \end{bmatrix}$$

其中:

$$\begin{cases} \mathbf{q}_v = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \\ \boldsymbol{\omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T \\ l = [L_{xx} \quad L_{yy} \quad L_{xy} \quad L_{xz} \quad L_{yz}]^T \end{cases}$$

### 3.2 滤波算法流程

系统离散EKF滤波方程形式, 并假设系统满足高斯误差模型为

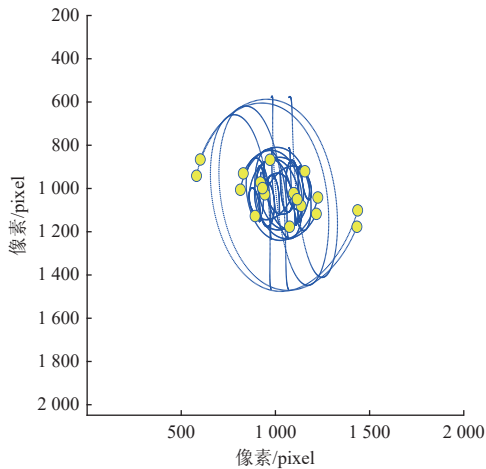
$$\begin{cases} \delta \mathbf{X}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_k \delta \mathbf{X}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k \\ \delta \mathbf{Z}_{k+1} = \mathbf{H}_k \delta \mathbf{X}_k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (34)$$

其中:  $\boldsymbol{\Phi}_k = e^{\mathbf{C} \Delta T} \approx \mathbf{I}_{8 \times 8} + \mathbf{C} \Delta T$ 。

以单目视觉获取的目标姿态四元数为观测量:

$$\delta \mathbf{Z} = \delta \mathbf{q}_v, \quad \mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

滤波方程流程为



(a) 目标特征点的图像平面轨迹

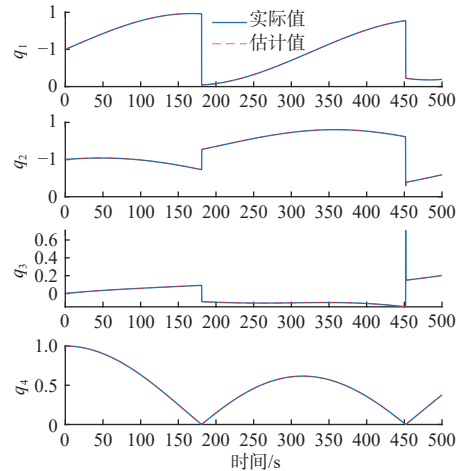
$$\begin{cases} \delta \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} = 0, \quad \mathbf{P}_{k|k-1} = \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\Phi}_k^T + \mathbf{Q}_k \\ \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} = f(\hat{\mathbf{X}}_{k-1}) \Delta T + \hat{\mathbf{X}}_{k-1} \\ \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \\ \delta \mathbf{Z}_k = \mathbf{Z}_k - h(\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}), \quad \hat{\mathbf{X}}_k = \delta \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \delta \mathbf{Z}_k \\ \mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}, \quad \hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \delta \hat{\mathbf{X}}_k \end{cases} \quad (36)$$

## 4 数学仿真实证

采用数学仿真验证卡尔曼滤波估计算法的有效性, 假设小天体目标惯量比矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.13 & 0.17 \\ 0.13 & 1.37 & -0.11 \\ 0.17 & -0.11 & 1 \end{bmatrix}$$

目标具有章动运动状态, 初始角速度:  $\boldsymbol{\omega} = [5.0 \quad 2.3 \quad 3.5](^\circ/\text{s})$ , 其与目标的主轴方向不重合; 设置目标初始滤波状态:  $\mathbf{X} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0.23 \quad 0.35 \quad 0.7 \quad 0.7 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ , 状态方程与测量误差矩阵为高斯误差模型,  $\mathbf{Q} = 0.001 \mathbf{I}_{11}$ ,  $\mathbf{R} = 0.001 \mathbf{I}_3$ 。本文仅以目标相对初始观测时刻的四元数为测量信息开展仿真, 由图像特征点获取空间非合作目标姿态四元数的处理方法已在文献[21]中给出, 仿真效果如图2所示。本文以四元数作为滤波估计测量输入, 通过仿真给出了目标姿态四元数、角速度与惯量比的估计结果与理论值的对比情况如图3~5所示, 红色曲线为目标状态参数的理论值, 蓝色曲线为目标状态参数的估计值, 可见对于各状态量估计能够稳定收敛, 其中系统姿态与角速度能够较快收敛, 目标的惯量比估计收敛速度相比之下更慢, 但最终还是能够实现滤波收敛的。因此, 基于单目图像是可以独立实现对于空间非合作目标的姿态、角速度与惯量比的估计, 不需要同时估计目标空间位



(b) 目标姿态四元数测量结果

图2 空间非合作目标姿态四元数仿真结果曲线

Fig. 2 Quaternion simulation result curve of non cooperative target attitude in space

置, 本文所给出的滤波方法是有效的, 并且也进一步印证了系统是完全可观的。

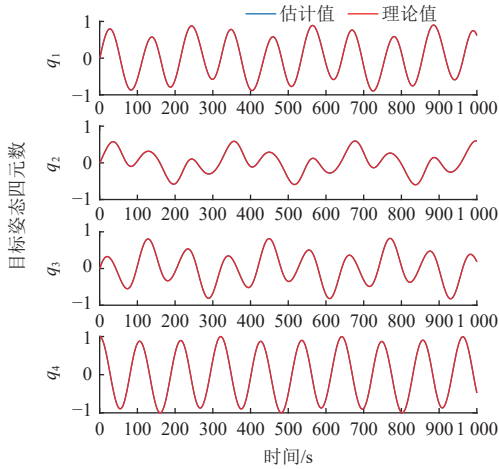


图 3 目标姿态四元数估计结果与理论值对比

Fig. 3 Comparison between target attitude quaternion estimation results and theoretical values

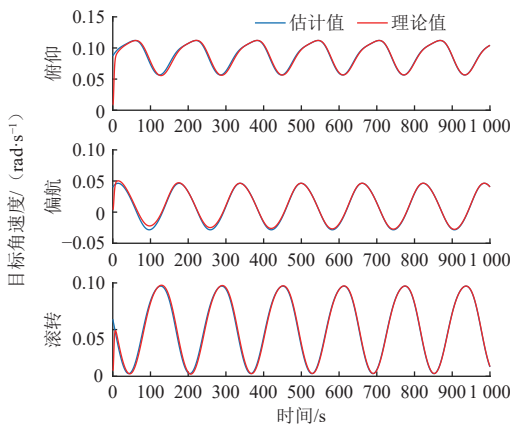


图 4 目标姿态角速度估计结果与理论值对比

Fig. 4 Comparison between target attitude angular velocity estimation results and theoretical values

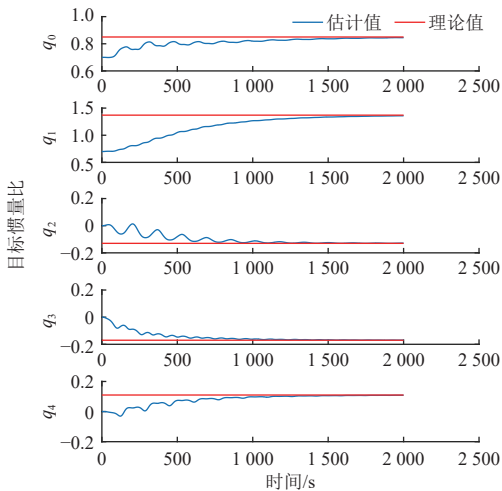


图 5 目标惯量比估计结果与理论值对比

Fig. 5 Comparison between estimated target inertia ratios and theoretical values

进一步针对仅自旋状态小天体目标开展仿真, 目标惯量比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 1.37 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

初始角速度:  $\omega = [0 \ 2.3 \ 0](^\circ/\text{s})$ , 其与目标的一主轴方向平行, 才能保证目标是保持自旋状态的, 滤波的初值及误差都与之前算例相同, 得到目标角动量比的估计曲线如图6所示, 可以看出, 目标的惯量比无法实现滤波收敛, 即仅自旋状态目标无法估计目标角动量比, 这也与第3节可观性分析的结论是一致的。

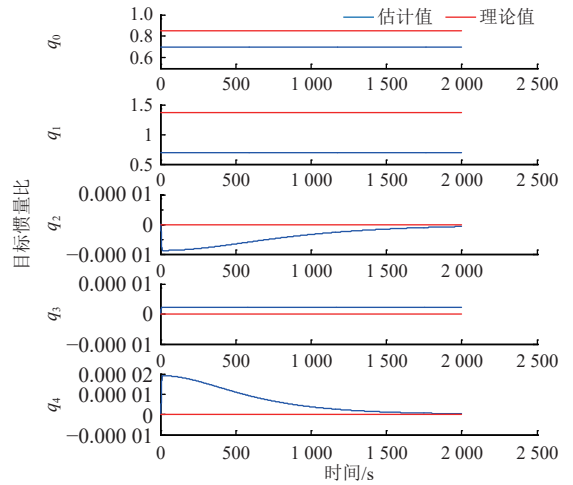


图 6 自旋状态目标的惯量比估计结果与理论值对比

Fig. 6 Comparison between estimated inertia ratios of spin state targets and theoretical values

### 5 结论

小天体属于典型的空非合作目标, 运动状态估计与参数辨识是保证附着与采样成功实施的关键前提。本文针对这类空非合作目标, 给出了基于序列图像的非合作目标运动测量与状态估计方法。首先, 采用单目视觉测量目标的姿态四元数, 以姿态四元素作为系统唯一观测量; 然后, 针对空非合作目标姿态、角速度及惯量比的估计, 基于Lie导数非线性系统可观性判据证明了系统是完全可观的; 进一步, 设计了扩展卡尔曼滤波器, 实现了目标运动角速度和惯量比参数的估计; 最后, 给出了数学仿真验证了所给出的卡尔曼滤波估计算法具有较好的收敛性, 所给出的运动测量与状态估计方法可以实现空非合作目标的相对姿态、角速度与惯量比的估计。

### 参 考 文 献

[1] XU C, WANG D Y, HUANG X Y. Autonomous navigation based on

- sequential images for planetary landing in unknown environments[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2017, 40(10): 2587-2602.
- [2] LI M D, HUANG X Y, XU C, et al. Velocimeter-aided attitude estimation for mars autonomous landing: observability analysis and filter algorithms[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2022, 58(1): 451-463.
- [3] AGHILI F A. Prediction and motion-planning scheme for visually guided robotic capturing of free-floating tumbling objects with uncertain dynamics[J]. *IEEE Transactions on Robotics: A publication of the IEEE Robotics and Automation Society*, 2012, 28(3): 634-649.
- [4] AGHILI F, PARSANI K. Motion and parameter estimation of space objects using laser-vision data[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2009(32): 538-550.
- [5] VOLPE R, SABATINI M, PALMERINI B G, et al. Pose and shape reconstruction of a noncooperative spacecraft using camera and range measurements[J]. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2017, 2017: 1-13.
- [6] SHTARK T, GURFIL P. Tracking a non-cooperative target using real-time stereovision-based control: an experimental study[J]. *Sensors*, 2017, 17(4): 1-29.
- [7] SEGAL S, CARMY A, GURFIL P. Stereovision-based estimation of relative dynamics between noncooperative satellites: theory and experiments[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2014, 22(2): 568-584.
- [8] PESCE V, LAVAGNA M, BEVILACQUA R. Stereovision-based pose and inertia estimation of unknown and uncooperative space objects[J]. *Advances in Space Research*, 2017, 59(1): 236-251.
- [9] GE D M, WANG D Y, ZOU Y J, et al. Motion and inertial parameter estimation of non-cooperative target on orbit using stereo vision[J]. *Advances in Space Research*, 2020(66): 1475-1484.
- [10] MARTIN M S, MENDECK G F, BRUGAROLAS P B, et al. In-flight experience of the Mars Science Laboratory guidance, navigation, and control system for entry, descent, and landing[J]. *CEAS Space Journal*, 2015, 7(2): 119-142.
- [11] BRUGAROLAS P B. Guidance, navigation and control for the entry, descent, and landing of the Mars 2020 mission[C]//Proceedings of 40th Annual Guidance and Control Conference. Breckenridge, Colorado: [s. n.], 2017.
- [12] BOS B, RAVINE M, CAPLINGER M, et al. Touch and go camera system (TAGCAMS) for the OSIRIS-REx asteroid sample return mission[J]. *Space Science Reviews*, 2018, 214(1): 1-23.
- [13] UO M, SHIRAKAWA K, HASHIMOTO T, et al. Hayabusa's touching-down to Itokawa-Autonomous guidance and navigation[C]//Proceedings of AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting. Tampa, United states: AIAA, 2006.
- [14] ONO G, TERUI F, OGAWA N, et al. GNC strategies and flight results of Hayabusa2 first touchdown operation[J]. *Acta Astronautica*, 2020, 174: 131-147.
- [15] WOKES D, WOKES S. Surveying and pose estimation of a lander using approximative crater modelling[C]//Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. [S. l.]: AIAA, 2010: 8342.
- [16] GELLER D K, KLEIN I. Angles-only navigation state observability during orbital proximity operations[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2014, 37(6): 1976-1983.
- [17] SONG L, LI Z, MA X R. A novel position and attitude estimation for space debris[J]. *Journal of Astronautics*, 2015, 36(8): 906-915.
- [18] DONG T S, WANG D Y, FU F Z, et al. Analytical nonlinear observability analysis for spacecraft autonomous relative navigation[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2022, 58(6): 5875-5893.
- [19] HERMANN R, KRENER A. Nonlinear controllability and observability[J]. *IEEE Transactions Automatic Control*, 1977, 22: 728-740
- [20] 崔平远, 常晓华, 崔祐涛. 基于可观测性分析的深空自主导航方法研究[J]. *宇航学报*, 2011, 32(4): 2115-2124.  
CUI P Y, CHANG X H, CUI H T. Research on observability analysis-based autonomous navigation method for deep space[J]. *Journal of Astronautics*, 2011, 32(4): 2115-2124.
- [21] RUNRAN D, DAYI W, WEI E, et al. Motion estimation of non-cooperative space objects based on monocular sequence images[J]. *Applied Sciences*, 2022, 12(24): 12625-12625.

作者简介:

**邓润然**(1988-), 男, 高级工程师, 主要研究方向: 航天器动力学与导航。

通信地址: 北京市海淀区友谊路104号(100094)

E-mail: [deng\\_run\\_ran@126.com](mailto:deng_run_ran@126.com)

**王大轶**(1973-), 男, 研究员, 博士生导师, 主要研究方向: 航天器自主制导、导航与控制、控制系统故障可诊断性、可重构性评价与设计等。**本文通信作者。**

通信地址: 北京5142信箱56分箱(100094)

E-mail: [dayiwang@163.com](mailto:dayiwang@163.com)

## Estimation of Motion State of Small Celestial Bodies Based on System Observability Analysis

DENG Runran<sup>1,2</sup>, WANG Dayi<sup>2</sup>, GE Dongming<sup>2</sup>, ZHENG Wei<sup>1</sup>, E Wei<sup>2</sup>, ZOU Yuanjie<sup>2</sup>, LI Jiaying<sup>2</sup>

(1. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Beijing Institute of Space Technology, Beijing 100094, China)

**Abstract:** The motion state and parameter estimation of small celestial bodies are important prerequisites for the successful implementation of small object attachment and sampling detection. Key parameters such as rotational angular velocity, inertia ratio and principal axis direction of small celestial bodies need to be obtained. However, due to the lack of markers and communication, and the typically tumbling motion of small celestial bodies, which are typical non-cooperative targets in space, estimating their motion state and parameters becomes a highly challenging task. In this paper, it is proved that the angular velocity, inertia ratio and other parameters of the attitude motion of the non-cooperative target in space are fully observable only by monocular sequence images, and the parameters such as the attitude motion and inertia ratio of the non-cooperative target are estimated by mathematical simulation, and the effectiveness of the method is verified by mathematical simulation.

**Keywords:** small objects; non-cooperative; monocular sequence images; observability; EKF filter estimation

### Highlights:

- The motion state and parameter estimation of small celestial bodies are important prerequisites for the successful implementation of small object attachment and sampling detection.
- Only monocular sequential images are used as measurement inputs, which can greatly simplify the configuration of the observation sensor of the spacecraft, and only require one camera to take sequential images of space targets.
- On the basis of the monocular sequential images with the target, the system is completely observable for obtaining the spatial attitude, angular velocity and inertia ratio of the target.
- The attitude dynamics equation of the space target is a nonlinear system, and the observable judgment method of the Lie derivative can be used to prove that the system is completely observable.
- Based on the extended Kalman filtering method, a filtering algorithm with the relative attitude of the target as the measurement is constructed, and the simulation results show that the state estimation results can converge.

[责任编辑: 宋宏, 英文审校: 宋利辉]