

# 小天体柔性附着自适应曲率制导

赵冬越<sup>1,2</sup>, 朱圣英<sup>1,2</sup>, 崔平远<sup>1,2</sup>

(1. 北京理工大学深空探测技术研究所, 北京 100081; 2. 深空自主导航与控制工信部重点实验室, 北京 100081)

**摘要:** 柔性附着是一种能够在小天体弱引力环境下防止倾覆反弹、提高附着安全性的新思路。针对柔性着陆器在附着过程中障碍规避的问题, 提出一种基于虚拟安全边界的自适应凸优化曲率制导方法。在几何凸轨迹曲率制导的基础上, 引入与柔性着陆器结构特性相关的虚拟安全边界, 并根据地形障碍信息自适应调整安全边界的形状, 使用序列凸优化方法求解柔性着陆器多节点协同的最优避障轨迹。数值仿真结果表明, 所提出的方法能有效满足柔性着陆器在复杂星表环境下障碍规避的需求, 进一步提高小天体附着的安全性。

**关键词:** 小天体; 柔性着陆器; 曲率制导; 动态安全边界; 序列凸优化

**中图分类号:** V448.2

**文献标识码:** A

**文章编号:** 2096-9287(2024)03-0233-11

**DOI:** 10.15982/j.issn.2096-9287.2024.20240030

**引用格式:** 赵冬越, 朱圣英, 崔平远. 小天体柔性附着自适应曲率制导[J]. 深空探测学报(中英文), 2024, 11(3): 233-243.

**Reference format:** ZHAO D Y, ZHU S Y, CUI P Y. Adaptive curvature guidance for flexible landing on small celestial bodies[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2024, 11(3): 233-243.

## 引言

表面定点附着技术是当前实施小天体探测任务的关键技术之一, 对于开展小天体原位探测和采样返回具有重要的意义。由于小天体体积小、形状不规则、表面形貌复杂且先验观测信息有限, 导致其动力学环境存在引力弱、逃逸速度低和不确定性强的特点<sup>[1-2]</sup>。从已实施的相关任务来看, 传统的刚性着陆器在接触小天体表面时容易发生反弹和倾覆, 影响后续探测任务的顺利开展<sup>[3-4]</sup>。

鉴于刚性附着模式的局限性, 近年来有学者提出了柔性附着的概念, 使用以柔性结构为主体的着陆器代替传统刚性着陆器实施小天体附着任务<sup>[5-6]</sup>。如图1所示, 柔性着陆器由一个圆盘形的柔性体和3个嵌入其上的刚性控制节点组成, 每个控制节点都配备有导航敏感器和推进器, 用于执行附着过程的自主导航和制导控制程序, 通过控制各节点的运动完成附着。由于柔性材料能够消耗附着后残余的动能, 且着陆器的面状外形增大了与小天体表面接触面积, 因此柔性着陆器对附着末端的状态误差具有较高的容忍度, 能降低发生反弹倾覆的概率, 提高附着安全性<sup>[7-8]</sup>。然而, 这种多节点柔性连接的特殊结构也给附着轨迹的设计带来了更多复杂需求<sup>[9-10]</sup>。附着过程中, 着陆器面状外形扫

过的路径边界随着柔性形变和姿态的运动而动态变化。因此在柔性附着的制导律设计中, 除了质心轨迹, 还应该充分考虑路径边界的几何约束, 以满足复杂星表环境下障碍规避的要求, 实现稳健附着。

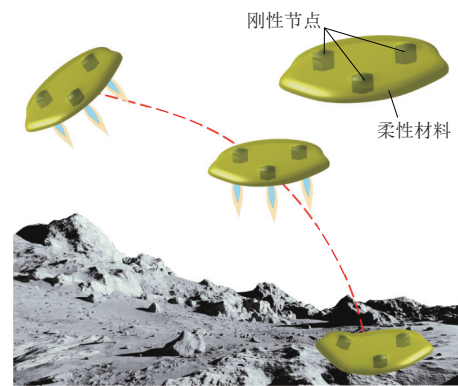


图 1 柔性附着过程示意图  
Fig. 1 Illustration of flexible landing process

现有小天体附着避障制导方法主要分为解析反馈和数值优化两大类, 分别通过改变反馈增益和设计优化指标及约束的途径实现对轨迹几何形状的自适应调节, 达到障碍规避的目的。文献[11~13]提出了一种曲率制导方法, 通过向经典解析制导律中引入曲率调节机制, 使着陆器沿几何凸轨迹下降。凸轨迹能显著

降低着陆器与表面地形障碍碰撞的风险,同时增强了着陆器对预定附着点的观测能力。文献[14~15]则将凸轨迹的曲率特性转化为着陆器位置和速度矢量的几何约束,提出了基于数值优化的曲率制导方法,在保持曲率制导优势的同时兼顾了对能耗等性能指标的优化。此外,考虑到测量误差和环境扰动等因素带来的运动不确定性,文献[16~17]引入了膨胀安全区的概念,通过计算安全区边界和障碍之间的关系评估碰撞风险,进一步提高了避障制导的可靠性。

本文针对柔性着陆器障碍规避的需求,将曲率和膨胀安全区概念与柔性着陆器的结构特性相结合,提出一种基于虚拟安全边界的自适应曲率制导方法。在计算中心参考凸轨迹的基础上,综合考虑着陆器的柔性形变范围、姿态倾斜范围,以及各节点的状态估计误差范围,建立围绕中心凸轨迹的着陆器动态安全边界,用于约束各节点的运动范围。通过对安全边界的自适应调节,能够满足柔性附着模式下的障碍规避需求,提高复杂表面环境附着的可靠性。

## 1 柔性着陆器多约束附着制导问题

### 1.1 柔性着陆器动力学模型

为方便描述柔性着陆器的运动,首先定义如下笛卡尔坐标系:

1) 着陆点坐标系 $OXYZ$ : 原点 $O$ 位于小天体表面的预定着陆点上, $Z$ 轴沿当地水平面法向指向天顶方向, $X$ 轴和 $Y$ 轴在当地水平面内,相对关系按右手法则定义。

2) 节点投影坐标系 $O_pX'Y'Z'$ : 设节点 $i$ 质心在着陆点系 $OXY$ 平面上的投影为 $P_i$ ,原点 $O_p$ 与 $P_1$ 重合, $X'$ 轴指向 $P_1$ 与 $P_2$ 连线方向 $P_1P_2$ , $Z'$ 轴与附着点系 $Z$ 轴平行, $Y'$ 轴按右手法则定义。

$\Delta O_1O_2O_3$ 所在平面为柔性着陆器等效面,定义等效面法向 $\mathbf{n}_s$ 与当地水平面法向 $\mathbf{z}_f$ 之间的夹角为等效面倾角 $\theta_s$ ,使用倾角大小来表征着陆器的整体姿态。上述坐标系与等效面如图2所示。

对于一般的表面附着问题,定义 $\mathbf{r}_0$ 为着陆器的质心在着陆点系 $OXYZ$ 的位置矢量, $\mathbf{v}_0$ 为质心速度矢量,着陆器质量为 $m$ ,则附着过程中着陆器的质心动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}_0 \\ \dot{\mathbf{v}}_0 = \frac{1}{m}(\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_c) \\ \dot{m} = -\frac{\|\mathbf{F}_c\|}{I_{sp}g_e} \end{cases} \quad (1)$$

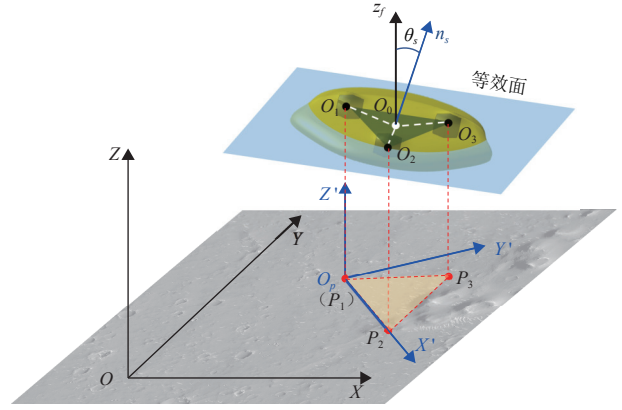


图2 坐标系与等效面示意图

Fig. 2 Coordinates and the equivalent surface

其中: $\mathbf{F}_c$ 为各推进器输出控制力的合力; $I_{sp}$ 为推进器比冲; $g_e = 9.8 \text{ m/s}^2$ 为海平面重力加速度; $\mathbf{F}_g$ 为环境力,包括小天体引力和自旋惯性力,其表达式为

$$\mathbf{F}_g = [\mathbf{g}(\mathbf{r}_0) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0) - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0]m \quad (2)$$

其中: $\boldsymbol{\omega}$ 为小天体自旋角速度; $\mathbf{g}(\mathbf{r}_0)$ 为质心位置的引力加速度。引力加速度可以通过目标小天体的多面体模型<sup>[18]</sup>近似计算

$$\mathbf{g} = \nabla U = -G\rho \sum_{e=1}^{N_e} L_e E_e \mathbf{r}_e + G\rho \sum_{f=1}^{N_f} \omega_f \mathbf{F}_f \mathbf{r}_f \quad (3)$$

其中: $G$ 为引力常数; $\rho$ 为小天体平均密度;其它量均为多面体模型各面和棱边相关的几何特征项。

由于柔性附着方案通过分别控制3个刚性节点的运动实现对柔性着陆器整体运动的控制,其状态也须由3个节点的状态近似表征。节点 $i(i=1, 2, 3)$ 的动力学方程在着陆点系中表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i \\ \dot{\mathbf{v}}_i = \frac{1}{m_i}(\mathbf{F}_{gi} + \mathbf{F}_{ci} + \mathbf{F}_{ni}) \\ \dot{m}_i = -\frac{\|\mathbf{F}_{ci}\|}{I_{sp}g_e} \end{cases} \quad (4)$$

其中: $\mathbf{r}_i$ 为节点位置; $\mathbf{v}_i$ 为节点速度; $m_i$ 为单个节点的等效质量; $\mathbf{F}_{ci}$ 和 $\mathbf{F}_{gi}$ 为节点受到的主动控制力和环境力; $\mathbf{F}_{ni}$ 为节点间柔性连接带来的柔性内力,可以看作节点 $i$ 与另外两个节点 $j$ 和 $k$ 之间相对运动关系的函数。记节点间相对位置矢量为 $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ ,节点间标称间距为 $L_s$ ,则柔性内力可以表示为

$$\mathbf{F}_{ni} = \mathbf{F}_{nji}(\Delta r_{ij}, \Delta \dot{r}_{ij}) + \mathbf{F}_{nki}(\Delta r_{ik}, \Delta \dot{r}_{ik}) \quad (5)$$

其中: $\Delta r_{ij} = \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\| - L_s$ ;  $\Delta r_{ik} = \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\| - L_s$ 。根据柔性材料的弹塑性特征, $\mathbf{F}_{ni}$ 可拆分为以弹簧-阻尼模型

描述的低阶项和复杂高阶余项, 其表达式为

$$F_{nij} = (k_1 \Delta r_{ij} + c_1 \Delta \dot{r}_{ij}) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{\|\mathbf{r}_{ij}\|} + \sum_{\chi=2}^{\infty} \left[ (k_{\chi} \Delta r_{ij}^{\chi} + c_{\chi} \Delta \dot{r}_{ij}^{\chi}) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{\|\mathbf{r}_{ij}\|} \right] + \mathbf{d}_{ij} \quad (6)$$

其中: 一阶系数 $k_1$ 和 $c_1$ 具有明确的物理含义, 即弹性系数和阻尼系数;  $\mathbf{d}_{ij}$ 为除拉压内力以外的弯扭余项。

### 1.2 柔性附着制导问题

柔性着陆器的附着制导问题需要在式(1)的质心动力学和式(4)的节点动力学基础上, 综合考虑附着过程中的运动平稳性和障碍规避需求, 同时设计3个节点的协同附着轨迹, 并最小化燃料消耗。轨迹设计过程中需要考虑的约束条件主要包括以下几项。

#### 1) 状态边界约束

初始时刻各节点的位置、速度和质量给定, 末端时刻节点速度为零, 位置收敛到预定着陆点附近的邻域 $\Omega_f$ 内

$$\begin{cases} \mathbf{r}_i(t_0) = \mathbf{r}_{i0}, \mathbf{v}_i(t_0) = \mathbf{v}_{i0}, m_i(t_0) = m_{i0} \\ \mathbf{r}_i(t_f) \in \Omega_f, \mathbf{v}_i(t_f) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

#### 2) 节点构型约束

各节点之间的间距存在上下边界, 防止过大的形变导致结构失效或运动失稳

$$L_{\min} \leq \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\| \leq L_{\max} \quad (8)$$

#### 3) 姿态平稳约束

着陆器等效面倾角不超过给定的上限, 防止附着过程中姿态偏差过大

$$\theta_s = \arccos(\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{z}_f) \leq \theta_{\max} \quad (9)$$

#### 4) 推力幅值约束

每个节点的控制推力幅值不超过给定的范围

$$F_{\min} \leq \|\mathbf{F}_{ci}\| \leq F_{\max} \quad (10)$$

#### 5) 障碍规避约束

对于给定的地形障碍区域 $\Omega_o$ , 定义节点 $i$ 与障碍边界的最小距离为 $d_{io}$ 。为防止着陆器与地形障碍发生碰撞, 该最小距离应不低于某一安全下限, 即

$$d_{io} \geq d_{\text{safe}} > 0 \quad (11)$$

以燃料消耗作为轨迹设计的最小化性能指标, 即最大化节点的末端质量, 其表达式为

$$\min J = - \sum_{i=1}^3 m_i(t_f) \quad (12)$$

综上所述, 柔性着陆器的附着避障制导问题可以总结为: 在式(4)给定的柔性附着动力学基础上, 综合考虑式(7)~(11)的约束条件, 设计3个节点的附着轨迹, 使得式(12)给定的性能指标最小。

## 2 柔性附着自适应曲率制导方法

### 2.1 算法结构

本文提出的柔性附着自适应曲率制导方法是在多节点附着轨迹序列凸优化的基础上建立的, 这一过程主要分为两部分: 虚拟安全边界建立和协同附着轨迹优化。首先应用曲率制导方法建立中心参考凸轨迹和围绕参考凸轨迹的虚拟安全边界, 根据地形障碍信息自适应调节凸轨迹曲率约束, 使安全边界和地形障碍边界保持安全距离。随后将安全边界作为柔性着陆器各节点的位置约束, 使用序列凸优化方法设计协同附着轨迹, 实现柔性着陆器的安全平稳附着。算法流程如图3所示。

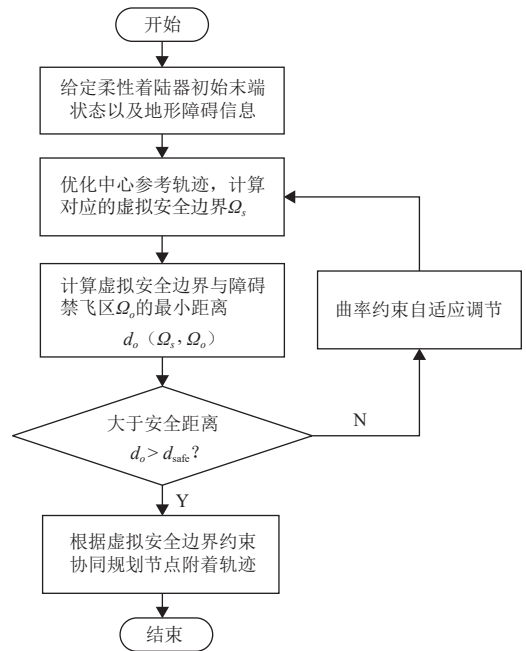


图 3 曲率自适应轨迹优化流程图

Fig. 3 Flowchart of curvature-adaptive trajectory optimization

### 2.2 虚拟安全边界模型

以着陆点坐标系的 $XOZ$ 平面作为附着过程的主投影平面。根据微分几何原理, 附着轨迹在该平面内的二维几何曲率可以表示为着陆器在 $x$ 和 $z$ 方向速度的函数

$$\kappa_r = \frac{v_z \dot{v}_x - v_x \dot{v}_z}{(v_x^2 + v_z^2)^{3/2}} \quad (13)$$

当曲率 $\kappa_r < 0$ 时, 附着轨迹为几何凸轨迹;  $\kappa_r > 0$

时为几何凹轨迹, 如图4所示。当着陆器沿几何凸轨迹下降时与地形障碍碰撞的概率更小。曲率制导方法<sup>[12]</sup>通过设计着陆器速度与位置矢量的相对关系约束实现令轨迹曲率为负的目标, 这一曲率约束表示为

$$\begin{cases} 0 < \arccos \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{z}_f}{\|\mathbf{r}_0\|} \leq \theta_{cr}(t) \\ \left| \arccos \frac{\mathbf{v}_0 - \mathbf{x}_f}{\|\mathbf{v}_0\|} < \frac{\pi}{2} - \theta_{cr}(t) \right| \\ \theta_{cr}(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan \left( k \frac{\sqrt{2t_f t - t^2}}{t_f} + b \right) \end{cases} \quad (14)$$

其中:  $\mathbf{z}_f = [0, 0, 1]$ 为着陆点系 $z$ 轴正向;  $\mathbf{x}_f = [1, 0, 0]$ 为着陆点系 $x$ 轴正向; 参数 $k$ 、 $b$ 均为正实数,  $\theta_{cr} \in [0, \pi/2]$ 为随时间单调递减的边界夹角函数。约束(13)的几何意义: 着陆器质心与着陆点的连线与竖直方向的夹角单调递减, 且始终小于速度与竖直方向的夹角。在曲率约束的作用下, 无论着陆器运动的初始曲率为正还是为负, 附着过程中轨迹都会转变为几何凸轨迹。另外, 通过调节参数 $k$ 的大小, 可以改变凸轨迹的弯曲程度, 以适应不同的地形障碍规避需求。

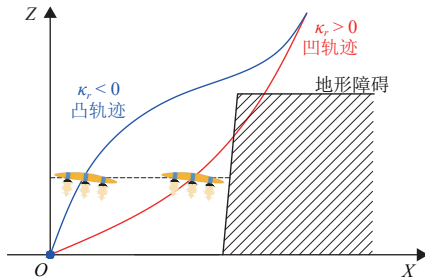


图4 几何凸轨迹的障碍规避优势

Fig. 4 Convex trajectory's advantage in obstacle avoidance

定义柔性附着虚拟安全边界 $\Omega_s$ 为以参考凸轨迹为中心的管道区域。柔性附着轨迹设计中, 只要将各节点位置约束在虚拟安全边界内部, 就可以保证柔性着陆器整体沿凸轨迹下降, 达到提升避障能力的效果。参考凸轨迹在 $t$ 时刻的位置为 $\mathbf{r}_0(t)$ , 速度为 $\mathbf{v}_0(t)$ , 对应的虚拟安全边界截面为垂直于速度方向的圆形区域, 该圆形截面的半径 $R_s$ 为

$$R_s = R_f + R_e + R_a \quad (15)$$

其中:  $R_f$ 为构型半径, 取值为柔性着陆器在式(8)给出的构型约束下, 几何中心到节点质心的最大距离, 即 $R_f = L_{\max}/\sqrt{3}$ , 如图5所示。 $R_a$ 为自由设定的冗余半径,  $R_e$ 为误差半径, 取值与各节点导航估计误差相关。对于任一节点, 服从高斯分布的位置估计误差边界可由 $3\sigma$ 误差膨胀椭球衡量<sup>[14,19]</sup>。设节点 $i$ 的误差椭球

的3个半轴长度分别为 $a_i, b_i, c_i$ , 则误差半径 $R_e$ 为9个半轴长度中的最大值, 即

$$R_e = \max(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3) \quad (16)$$

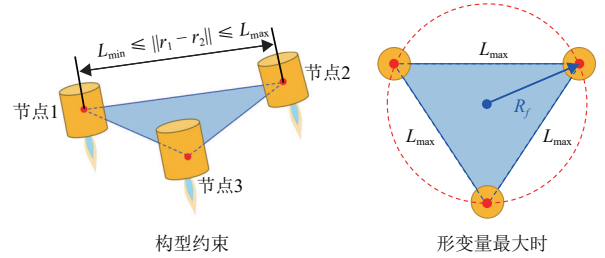


图5 节点构型约束与构型半径 $R_f$ 示意图

Fig. 5 Configuration constraint and configuration radius  $R_f$

在此基础上, 可通过虚拟安全边界与小天体表面地形障碍的相对距离评估附着安全性。如图6所示, 对于给定的地形障碍区域 $\Omega_o$ , 从 $t$ 时刻参考轨迹位置 $\mathbf{r}_0(t)$ 出发, 垂直于速度矢量 $\mathbf{v}_0(t)$ 方向的直线与虚拟安全边界 $\Omega_s$ 和障碍区域 $\Omega_o$ 边界的交点分别为 $\mathbf{p}_s(t) = [x_s, y_s, z_s]$ 和 $\mathbf{p}_o(t) = [x_o, y_o, z_o]$ , 则当前时刻虚拟安全边界和地形障碍的距离 $d_o(t)$ 定义为上述两交点之间的距离

$$d_o(t) = \sqrt{(x_s - x_o)^2 + (y_s - y_o)^2 + (z_s - z_o)^2} \quad (17)$$

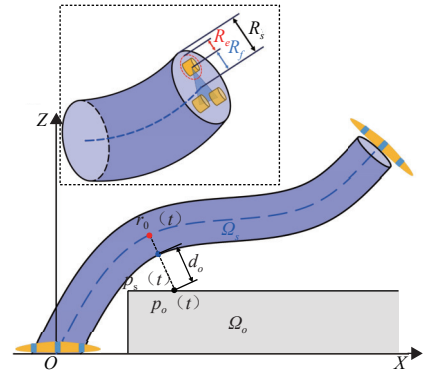


图6 虚拟安全边界与地形障碍的相对位置关系

Fig. 6 Relative position between virtual safety boundary and terrain obstacles

设柔性着陆器节点质心到着陆器结构边缘的最大距离为 $d_{ep}$ , 则虚拟安全边界与障碍边界的安全距离 $d_{\text{safe}}$ 定义为

$$d_{\text{safe}} = \mu d_{ep} \quad (18)$$

其中:  $\mu \geq 1$ 为安全膨胀因子。 $t$ 时刻虚拟安全边界满足障碍规避需求的条件为

$$\begin{cases} \mathbf{p}_s(t) \notin \Omega_o \\ d_o(t) \geq d_{\text{safe}} \end{cases} \quad (19)$$

### 2.3 虚拟安全边界计算

从第2.2节的概念出发, 柔性着陆器虚拟安全边界可以通过以下步骤计算。

1) 解算中心参考凸轨迹。初始状态 $[\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, m]$ 按照柔性着陆器的中心初始状态给定, 其中着陆器质量 $m$ 按照3节点质量之和计算

$$\begin{cases} \mathbf{r}_0(t_0) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i(t_0) \\ \mathbf{v}_0(t_0) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_i(t_0) \\ m(t_0) = \sum_{i=1}^3 m_i(t_0) \end{cases} \quad (20)$$

此外, 优化指标为与式(12)相同的燃耗最小化指标, 动力学等式约束由式(10)给定。同时考虑推力幅值约束式(10)和几何曲率约束式(14)。由于中心参考轨迹的着陆器质量为节点质量之和, 相应的推力幅值约束也应该按照三节点合推力的形式给出, 即

$$3F_{\min} \leq \|\mathbf{F}_c\| \leq 3F_{\max} \quad (21)$$

该优化问题可使用文献[11]凸优化方法的解算, 得到初始参考凸轨迹。

2) 以参考凸轨迹为中心,  $R_s$ 为半径生成虚拟安全边界 $\Omega_s$ , 评估该虚拟安全边界与地形障碍区域 $\Omega_o$ 的相对关系是否满足障碍规避条件式(19)。若满足条件, 则完成虚拟安全边界的建立, 若不满足, 则进入步骤3。

3) 对于当前的参考凸轨迹, 设 $t$ 时刻状态不满足避障条件式(19), 则在当前参考轨迹位置 $\mathbf{r}_0(t)$ 附近寻找一个目标修正位置 $\mathbf{r}'_0(t)$ , 使修正后位置对应的安全边界满足避障安全距离。 $\mathbf{r}'_0(t)$ 的确定方法如下

当 $\mathbf{p}_s(t) \notin \Omega_o, d_o(t) < d_{\text{safe}}$ 时,  $\mathbf{r}'_0(t)$ 为

$$\mathbf{r}'_0(t) = \mathbf{r}_0(t) + \left( \frac{d_{\text{safe}}}{\|\mathbf{p}_s(t) - \mathbf{p}_o(t)\|} - 1 \right) [\mathbf{p}_s(t) - \mathbf{p}_o(t)] \quad (22)$$

当 $\mathbf{p}_s(t) \in \Omega_o$ 时,  $\mathbf{r}'_0(t)$ 为

$$\mathbf{r}'_0(t) = \mathbf{r}_0(t) + \left( \frac{d_{\text{safe}}}{\|\mathbf{p}_o(t) - \mathbf{p}_s(t)\|} + 1 \right) [\mathbf{p}_o(t) - \mathbf{p}_s(t)] \quad (23)$$

4) 根据目标修正位置 $\mathbf{r}'_0(t)$ 更新参考凸轨迹曲率约束式(14)参数 $k$ 的取值

$$\theta'_{\text{cr}}(t) = \arccos \frac{\mathbf{r}'_0(t) \cdot \mathbf{z}_f}{\|\mathbf{r}'_0(t)\|} \quad (24)$$

$$k = \sqrt{\frac{t_f}{2t_f t - t^2}} (\cot \theta'(t) + b) \quad (25)$$

5) 返回步骤1, 使用更新后的曲率约束重新解算参考凸轨迹。

上述虚拟安全边界建立过程可以整理为图7所示的算法流程图。

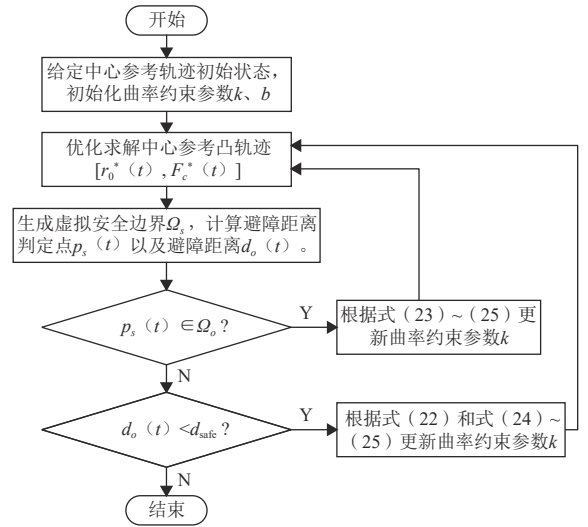


图7 虚拟安全边界建立流程图

Fig. 7 Construction of virtual safety boundary

### 2.4 协同附着轨迹优化

建立虚拟安全边界后, 对于1.2节的柔性附着制导问题, 地形障碍规避约束可以从式(11)转化为以下形式的安全边界约束

$$\mathbf{r}_i(t) \in \Omega_s, (i = 1, 2, 3) \quad (26)$$

由于柔性着陆器节点间的柔性内力 $\mathbf{F}_{ni}$ 和小天体引力 $\mathbf{g}(\mathbf{r}_i)$ 均为和节点运动状态相关的强非线性函数, 且不等式约束式(8)~(10)以及安全边界约束式(26)均为非凸约束, 因此柔性附着制导问题同时是一个非凸的协同轨迹优化问题, 需要采用序列凸优化方法求解。序列凸优化问题通过将非凸优化问题的求解过程分解为对一系列凸问题的迭代求解, 每一步求解过程中, 将上一步解出的最优轨迹作为参考轨迹, 利用参考轨迹的信息完成约束凸化, 直到相邻两次求解的最优轨迹偏差小于收敛准则, 即可认为得到了原问题的近最优解。

首先对于非凸推力幅值约束(10), 引入松弛变量 $\Gamma_i (i = 1, 2, 3)$ , 将原不等式约束替换为

$$\|\mathbf{F}_{ci}\| \leq \Gamma_i, \mathbf{F}_{\min} \leq \Gamma_i \leq \mathbf{F}_{\max} \quad (27)$$

定义变量 $\sigma_i = \Gamma_i / m_i, \mathbf{u}_i = \mathbf{F}_{ci} / m_i, p_i = \ln m_i$ , 优化指标和动力学方程可以改写为

$$\min J = \int_{t_0}^{t_f} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) dt \quad (28)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i \\ \dot{\mathbf{v}}_i = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_i + \mathbf{u}_{ci} + \mathbf{u}_i^{\text{ref}} \\ \dot{p}_i = -\frac{\sigma_i}{I_{\text{sp}} g_c} \end{cases} \quad (29)$$

$$\mathbf{u}_i^{\text{ref}} = \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{r}}_i) + \frac{\mathbf{F}_{mi}(\tilde{\mathbf{r}}_{i/j/k}, \tilde{\mathbf{v}}_{i/j/k})}{\tilde{m}_i} \quad (30)$$

其中:  $\tilde{\mathbf{r}}_i, \tilde{\mathbf{v}}_i, \tilde{m}_i$  分别为参考轨迹在对应时刻的节点位置、节点速度和节点质量。

改写后的动力学方程为线性形式, 节点构型约束改写为如下凸约束

$$\begin{cases} \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\| \leq L_{\text{max}} \\ \frac{(\tilde{\mathbf{r}}_i - \tilde{\mathbf{r}}_j)}{\|\tilde{\mathbf{r}}_i - \tilde{\mathbf{r}}_j\|} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \geq L_{\text{min}} \end{cases} \quad (31)$$

下面研究等效面倾角约束式(9)的凸化, 在节点投影坐标系  $O_p X' Y' Z'$  将节点相对位置矢量记为  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}'_j - \mathbf{r}'_i = [x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}]$ , 将节点相对距离记为  $\|\mathbf{r}'_{ij}\| = L_{ij}$ 。根据坐标系定义可知  $y_{12} = -y_{21} = 0$ , 等效面倾角可表示为

$$\theta_s = \arccos \frac{\mathbf{r}'_{12} \times \mathbf{r}'_{13}}{\|\mathbf{r}'_{12} \times \mathbf{r}'_{13}\|} \cdot \mathbf{z}_f = \arccos \frac{x_{12} y_{13}}{\sqrt{z_{21}^2 y_{13}^2 + (z_{12} x_{13} + x_{21} z_{13})^2 + x_{12}^2 y_{13}^2}} \quad (32)$$

记  $\mathbf{r}'_{ij}$  在水平面  $O_p X' Y'$  内的投影长度为  $p_{ij}$ , 则有

$$\begin{cases} p_{12} = \sqrt{L_{12}^2 - z_{12}^2} \\ p_{13} = \sqrt{L_{13}^2 - z_{13}^2} \\ p_{23} = \sqrt{L_{23}^2 - (z_{13} - z_{12})^2} \end{cases} \quad (33)$$

$p_{ij}$  与  $x_{ij}, y_{ij}$  之间满足如下几何关系

$$\begin{cases} x_{12} = p_{12} \\ x_{13} = \frac{p_{12}^2 + p_{13}^2 - p_{23}^2}{2p_{12}} \\ y_{13} = p_{13} \sqrt{1 - \left( \frac{p_{12}^2 + p_{13}^2 - p_{23}^2}{2p_{12} p_{13}} \right)^2} \end{cases} \quad (34)$$

将式(33)、(34)代入式(32), 可得等效面倾角  $\theta_s$  关于  $L_{ij}$  和节点高度差  $z_{12}, z_{13}$  的表达式

$$\theta_s = \arccos \left( \sqrt{\frac{\eta_1 z_{12}^2 + \eta_2 z_{13}^2 + \eta_3 z_{12} z_{13} + \eta_4}{\kappa_1 z_{12} z_{13} + \kappa_2}} \right) \quad (35)$$

其中: 系数  $\eta_1 \sim \eta_4$  以及  $\kappa_1, \kappa_2$  的值为

$$\begin{cases} \eta_1 = -4L_{13}^2 \\ \eta_2 = -4L_{12}^2 \\ \eta_3 = -4(L_{23}^2 - L_{13}^2 - L_{12}^2) \\ \eta_4 = 2L_{12}^2 L_{13}^2 + 2L_{12}^2 L_{23}^2 + 2L_{13}^2 L_{23}^2 - L_{12}^4 - L_{13}^4 - L_{23}^4 \\ \kappa_1 = 8(L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{23}^2) \\ \kappa_2 = \eta_4 \end{cases} \quad (36)$$

根据式(36), 柔性着陆器等效面倾角约束  $\theta_s \leq \theta_{\text{max}}$  可以改写为

$$\begin{cases} g_\theta(z_{12}, z_{13}) \leq 0 \\ g_\theta(z_{12}, z_{13}) = \cos^2(\theta_{\text{max}})(\kappa_1 z_{12} z_{13} + \kappa_2) - (\eta_1 z_{12}^2 + \eta_2 z_{13}^2 + \eta_3 z_{12} z_{13} + \eta_4) \end{cases} \quad (37)$$

函数  $g_\theta$  求关于  $z_{12}$  和  $z_{13}$  的Hessian矩阵如下

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 8L_{13}^2 & \alpha(L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{23}^2) \\ \alpha(L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{23}^2) & 8L_{12}^2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\alpha = 8 \cos^2 \theta_{\text{max}} - 4 \quad (39)$$

当  $0 \leq \theta_{\text{max}} \leq \pi/4$  且  $L_{ij}^2 + L_{ik}^2 - L_{jk}^2 \geq 0$  时, Hessian矩阵  $\mathbf{H}$  中的每一项均为非负, 为半正定矩阵。因此, 通过合理给定等效面倾角约束和构型约束的边界, 非凸倾角约束式(9)就可转化为仅与节点高度差相关的凸约束式(37)。

最后处理虚拟安全边界约束式(26), 虚拟安全边界为以参考凸轨迹为中心的管道区域, 因此同样属于非凸约束。为凸化该约束, 可将管道区域近似拆分为一系列圆柱形区域, 将每一时刻的3节点位置约束在对应的圆柱区域内。  $t$  时刻的圆柱区域中心为当前的参考轨迹位置  $\mathbf{r}_0(t)$ , 轴向为当前参考轨迹速度方向  $\mathbf{v}_0(t)/\|\mathbf{v}_0(t)\|$ , 半径为  $R_s$ , 高度  $h_{\text{cy}}(t)$  与当前速度大小有关

$$h_{\text{cy}}(t) = \beta \|\mathbf{v}_0(t)\|, \beta > 0 \quad (40)$$

安全边界约束可以凸化为如下形式

$$\begin{cases} \left\| \frac{\mathbf{v}_0(t)}{\|\mathbf{v}_0(t)\|} \times [\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_0(t)] \right\| \leq R_s \\ \left| \frac{\mathbf{v}_0(t)}{\|\mathbf{v}_0(t)\|} \cdot [\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_0(t)] \right| \leq h_{\text{cy}} \end{cases} \quad (41)$$

综上, 序列凸优化的子问题可以概括为以式(28)为优化指标, 式(7)、(29)为等式约束, 式(27)、(31)、(37)和(41)为不等式约束的凸优化问题。

设第  $n-1$  轮和第  $n$  轮优化得到的最优轨迹分别为  $\mathbf{r}_{in-1}^*(t)$  和  $\mathbf{r}_n^*(t)$ , 定义轨迹距离为

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^{t_f} \|r_{i,n-1}^*(t) - r_{i,n}^*(t)\| dt \quad (42)$$

当  $\Delta_n$  小于给定的收敛准则  $\varepsilon$  时, 停止迭代优化, 将  $r_{in}^*(t)$  作为协同最优轨迹输出。

最后可根据上述优化过程设计相应的柔性附着曲率制导律: 在附着初始时刻, 制导算法按照图3给出的流程进行完整的虚拟安全边界计算与协同附着轨迹序列优化, 得到初始的最优附着轨迹与相应的最优制导指令序列。在随后的附着过程中, 制导算法在每一个制导周期  $\Delta t_g$  接收导航系统对着陆器各节点当前状态的实时估计结果, 并将上一个周期解算的最优轨迹作为参考轨迹, 对协同附着轨迹进行新一轮凸优化求解, 从而更新制导指令以校正着陆器的运动偏差, 直至到达目标着陆点。得益于凸优化方法在求解的快速性, 闭环制导律的实时性能能够得到较好的保证。

### 3 数值仿真

为验证所提出方法的可行性, 以小行星433Eros为目标开展柔性附着仿真。仿真设备所用操作系统为64位Windows-11系统, CPU主频3.0 GHz, 内存容量32 GB。凸优化解算使用R2022a版本MATLAB软件嵌入的MOSEK 10.1.21优化工具包完成。

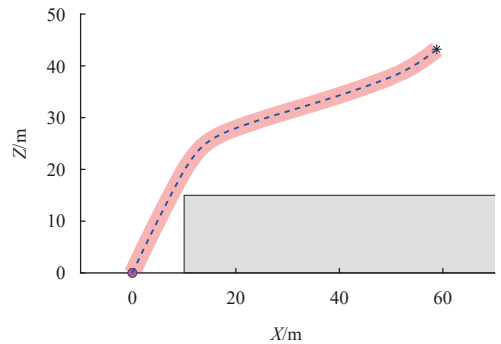
目标小行星的自旋角速度  $3.31 \times 10^{-4}$  rad/s, 密度  $2.67 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>。在目标小行星质心固连坐标系下, 参考轨迹初始位置设 [1 060, 5 065, -35] m, 初始速度 [-0.85, -0.42, -0.91] m/s, 目标附着位置 [1 003, 5 049, -78] m, 目标速度为0。对应的着陆点坐标系下的初始末端状态、参考凸轨迹和虚拟安全边界计算所用的各项参数如表1所示, 并给定地形障碍区域为如下的矩形区域

表 1 参考凸轨迹优化仿真参数取值  
Table 1 Parameters of reference convex trajectory optimization

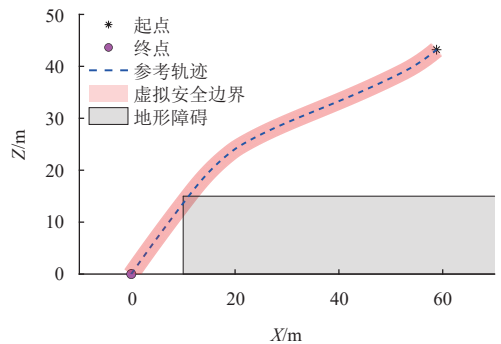
参数	取值
着陆点系初始位置 $r_0/m$	[58.81, 5.31, 43.21]
着陆点系初始速度 $v_0/(m \cdot s^{-1})$	[-0.99, 0.15, -0.84]
初始质量 $m_0/kg$	1000
比冲 $I_{sp}/s$	400
推力上限 $F_{max}/N$	60
推力下限 $F_{min}/N$	15
飞行时间 $t_f/s$	120
节点标称间距 $L_s/m$	$3\sqrt{3}/5$
节点间距范围 $[L_{min}, L_{max}]$	$[0.9L_s, 1.1L_s]$
节点 $3\sigma$ 误差椭圆半长轴 $R_e/m$	0.3
安全膨胀因子 $\mu$	1.0

$$\{(x, y, z) \in \Omega_0 | x > 10, 0 < z < 15\} \quad (43)$$

此外, 曲率约束的初始参数设为  $k=0.96, b=0.47$ , 安全边界截面的冗余半径设为  $R_a = 0.5$  m, 完整截面半径为  $R_s = L_{max} / \sqrt{3} + R_e + R_a = 1.46$  m。使用第2.2~2.3节的自适应曲率制导方法生成参考凸轨迹和满足障碍规避条件的虚拟安全边界。算法经过一次自适应修正后得到最终结果, 总耗时1.84 s。曲率约束增益  $k$  从0.96修正到1.68, 曲率约束修正前后的中心参考轨迹和虚拟安全边界如图8所示。从图中可以看出, 在曲率约束的影响下, 参考轨迹从初始的几何凹轨迹转化为几何凸轨迹, 且凸轨迹的弯曲程度随增益  $k$  的增大而增加, 和理论预测相符。自适应修正后轨迹的三轴位置、速度、控制加速度与合推力曲线如图9所示。



(a) 自适应修正前  $k = 0.96$



(b) 自适应修正后  $k = 1.68$

图 8 参考凸轨迹与虚拟安全边界

Fig. 8 Reference convex trajectory and virtual safety boundary

根据虚拟安全边界的范围进行柔性着陆器协同附着轨迹的序列凸优化仿真。初始时刻柔性着陆器三节点中心的位置与参考凸轨迹初始位置  $r_0(t_0)$  相同, 节点间距均为标称间距  $L_s$ , 并存在标准差0.02 m的初始位置偏差。三节点初始速度一致, 等于参考凸轨迹的初始速度  $v_0(t_0)$ 。此外, 着陆器等效面法向  $n_s$  在初始时刻与  $v_0(t_0)$  共线。节点构型约束边界、推力器比冲和飞行时间与表1一致, 其它参数的取值如表2所示。仿真过程

中,柔性内力仅考虑模型式(6)的低阶主项部分。序列凸优化的初始猜测为以参考凸轨迹为中心、节点间距保持为标称间距、等效面倾角为0的理想附着轨迹。迭代优化轨迹距离的收敛误差 $\varepsilon$ 设为0.1。序列凸优化程序经过7轮之后收敛,每轮迭代优化的耗时以及轨迹偏差 $\Delta_n$ 的收敛情况如表3所示。从表中可见单次凸优化的耗时较短,能够满足闭环制导的实时性要求。

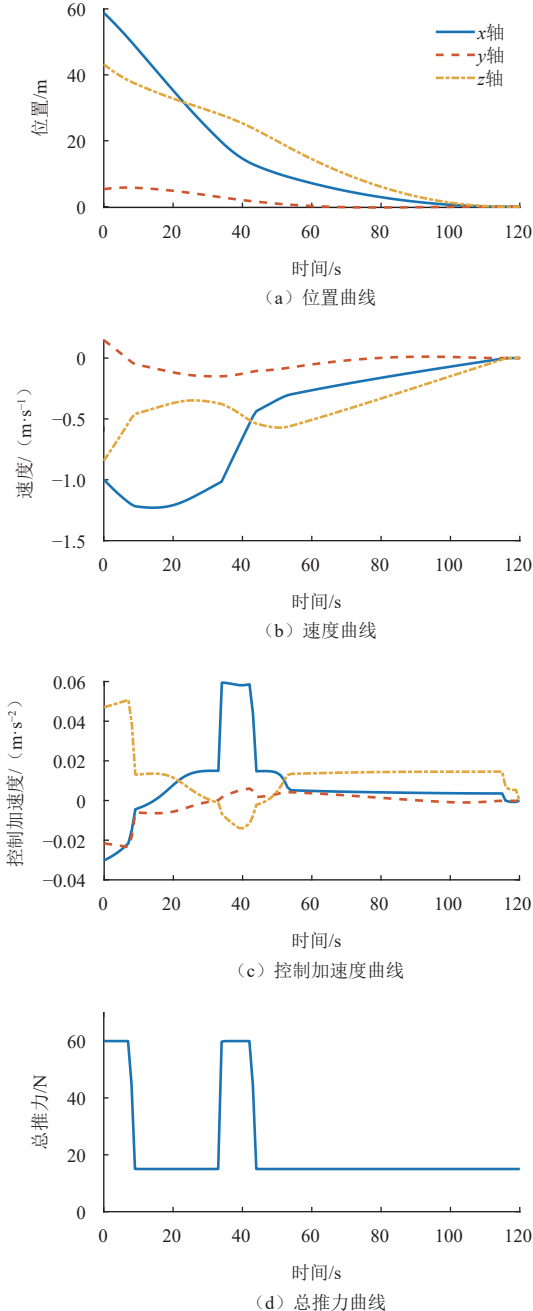


图9 自适应修正后的参考凸轨迹信息

Fig. 9 Information of corrected reference convex trajectory

三节点协同附着轨迹的三维曲线及其与虚拟安全边界和地形障碍之间的相对位置关系如图10所示,可

以看出在附着过程中各节点位置均处于虚拟安全边界内部,实现了对地形障碍的有效规避。其中某一节点的三轴位置、速度、控制加速度与合推力曲线如图11所示,曲线形状与图9显示的参考凸轨迹相近。表4给出了三节点末端位置与末端速度信息,结果满足末端状态约束的要求。

表2 柔性附着协同轨迹优化仿真参数取值

Table 2 Parameters of flexible landing trajectory cooperative optimization

参数	取值
单节点初始等效质量 $m_i(t_0)/\text{kg}$	333.33
末端速度范围 $[v_{\min}, v_{\max}]/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$[-0.01, 0.01]$
柔性内力主弹性系数 $k_1$	1708.4
柔性内力主阻尼系数 $c_1$	2.58
单节点推力上限 $F_{\max}/\text{N}$	20
单节点推力下限 $F_{\min}$ (N)	5
等效面倾角上限 $\theta_{\max}/(^{\circ})$	15
安全边界纵向约束系数 $\beta$	10

表3 序列凸优化轨迹偏差收敛情况

Table 3 Convergence of trajectory deviation during successive convex programming process

序列优化轮次 $n$	优化耗时/s	轨迹偏差 $\Delta_n$
1	0.4215	—
2	0.4870	3.1831
3	0.4856	2.4680
4	0.4476	2.1503
5	0.4453	0.8722
6	0.4631	0.1990
7	0.4835	0.0710

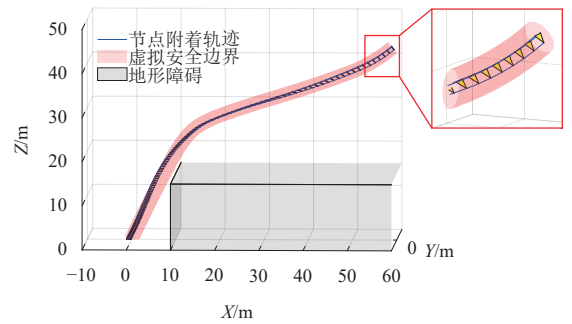


图10 虚拟安全边界约束下的三节点协同附着轨迹

Fig. 10 Cooperative landing trajectory constrained by virtual safety boundary

协同附着过程中三节点间距的变化曲线和等效面倾角的变化曲线分别如图12和图13所示。节点间距始终处于构型约束给定的范围内,并随时间逐渐收敛到标称间距。给定的初始状态的等效面倾角较大,附着过程中快速收敛,并保持在倾角上限以内。优化结果能够顺利满足柔性着陆器的构型约束式(8)和姿态平稳性约束式(9)。

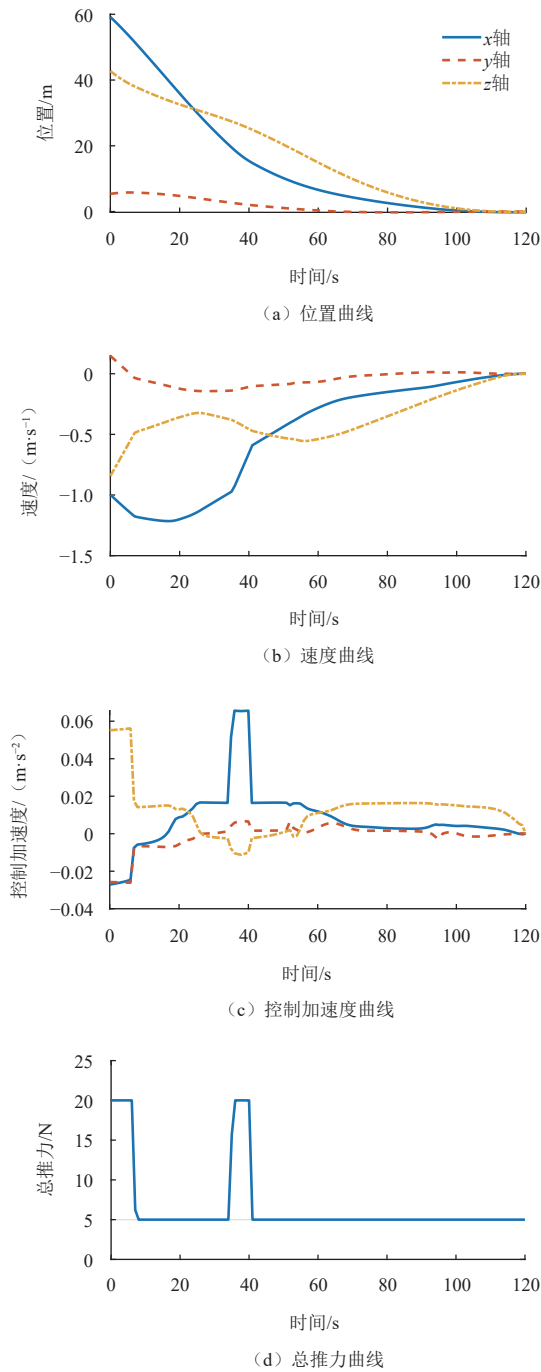


图 11 节点1的附着轨迹信息  
Fig. 11 Information of node 1's landing trajectory

表 4 三节点末端状态信息

Table 4 Terminal states of three nodes

末端状态	数值
节点1位置/m	$[-0.221, -0.011, -0.083]$
节点2位置/m	$[-1.086, 0.569, -0.124]$
节点3位置/m	$[-1.156, -0.471, -0.111]$
节点1速度/ $(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$[6.47 \times 10^{-5}, -4.92 \times 10^{-5}, -7.40 \times 10^{-4}]$
节点2速度/ $(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$[7.72 \times 10^{-4}, 0.001, -3.20 \times 10^{-4}]$
节点3速度/ $(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$[-5.57 \times 10^{-4}, 0.001, -8.39 \times 10^{-4}]$

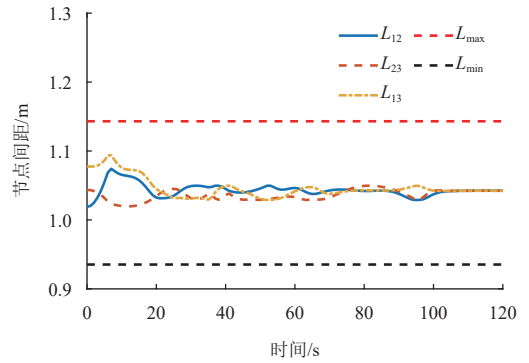


图 12 节点间距变化曲线  
Fig. 12 Profile of distances between nodes

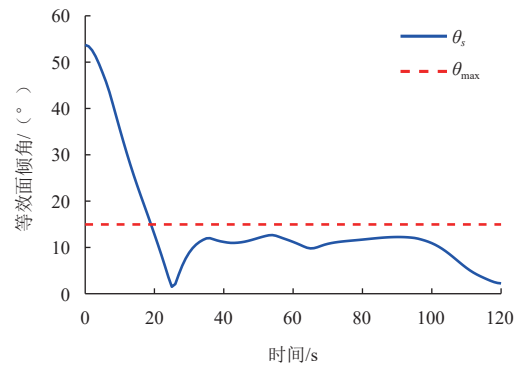


图 13 等效面倾角变化曲线  
Fig. 13 Profile of equivalent surface tilt angle

## 4 结 论

本文基于弱引力小天体柔性附着方案, 对柔性着陆器在复杂形貌环境下障碍规避制导的方法开展研究。根据柔性着陆器的外形结构特征, 结合凸轨迹曲率制导方法和安全膨胀区模型, 提出了柔性附着自适应避障的虚拟安全边界生成方法。构造了虚拟安全边界约束下的多节点协同附着问题, 使用序列凸优化方法解算协同附着轨迹, 实现安全附着制导。仿真结果表明, 本方法能够有效生成与表面形貌相适应的多节点协同附着轨迹, 同时能够满足柔性着陆器在附着过程中的构型保持和姿态平稳性要求, 有助于提高柔性附着方案的可靠性。

## 参 考 文 献

[1] 崔平远, 赵冬越, 朱圣英, 等. 小天体主动附着制导与控制技术研究进展[J]. 宇航学报, 2021, 42(9): 1057-1066.  
CUI P Y, ZHAO D Y, ZHU S Y, et al. Research progress of guidance and control technologies for active landing on small celestial bodies[J]. Journal of Astronautics, 2021, 42(9): 1057-1066.

[2] 袁旭, 朱圣英, 崔平远. 小天体自主附着多滑模面鲁棒制导方法研究[J]. 深空探测学报(中英文), 2015, 2(4): 345-351.  
YUAN X, ZHU S Y, CUI P Y. Study on robust multiple sliding surface

- guidance method for autonomous small celestial body landing[J]. *Journal of Deep Space Exploration*, 2016, 2(4): 345-351.
- [3] GE D T, CUI P Y, ZHU S Y. Recent development of autonomous GNC technologies for small celestial body descent and landing[J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 2019, 110: 100551.
- [4] ROLL R, WITTE L, ROSETTA. Lander philae: touch-down reconstruction[J]. *Planetary and Space Science*, 2016, 125: 12-19.
- [5] 崔平远, 陆晓萱, 朱圣英, 等. 小天体柔性附着状态协同估计方法[J]. *宇航学报*, 2022, 43(9): 1219-1226.
- CUI P Y, LU X X, ZHU S Y, et al. Cooperative state estimation method for small celestial body flexible landing[J]. *Journal of Astronautics*, 2022, 43(9): 1219-1226.
- [6] 崔平远, 张成宇, 朱圣英, 等. 小天体柔性附着技术[J]. *宇航学报*, 2023, 44(6): 805-816.
- CUI P Y, ZHANG C Y, ZHU S Y, et al. Technologies for flexible landing on small celestial bodies[J]. *Journal of Astronautics*, 2023, 44(6): 805-816.
- [7] FENG R Y, YOSHIDA K, LI J F, et al. Rebound stabilization for an asteroid lander by flexible plate design[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2022, 131: 107969.
- [8] FENG R Y, ZHANG Y, LIU J Y, et al. Soft robotic perspective and concept for planetary small body exploration[J]. *Soft Robotics*, 2022, 9(5): 889-899.
- [9] CHEN Z L, LONG J T, CUI P Y. Trajectory design for landing on small celestial body with flexible lander[J]. *Acta Astronautica*, 2023, 212: 492-504.
- [10] YAN W F, BAOYIN H X. Position-attitude coupling guidance and control for asteroid landing with a flexible lander[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2023, 141: 108567.
- [11] CUI P Y, QIN T, ZHU S Y, et al. Trajectory curvature guidance for Mars landings in hazardous terrains[J]. *Automatica*, 2018, 93: 161-171.
- [12] 杨贺, 袁旭, 葛丹桐, 等. 复杂行星表面着陆避障增广曲率制导方法[J]. *深空探测学报(中英文)*, 2024, 11(1): 71-78.
- YANG H, YUAN X, GE D T, et al. Hazard avoidance for complex planetary surface landing using augmented curvature guidance method[J]. *Journal of Deep Space Exploration*, 2024, 11(1): 71-78.
- [13] WANG P Y, GUO Y N, MA G F, et al. Two-phase zero-effort-miss/zero-effort-velocity guidance for mars landing[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2021, 44(1): 75-87.
- [14] CUI P Y, ZHAO D Y, ZHU S Y. Obstacle avoidance guidance for planetary landing using convex trajectory and adaptive curvature regulation[J]. *Acta Astronautica*, 2022, 199: 313-326.
- [15] LONG J T, CUI P Y, ZHU S Y. Vector trajectory method for obstacle avoidance constrained planetary landing trajectory optimization[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2022, 58(4): 2996-3010.
- [16] YUAN X, ZHU S Y, YU Z S, et al. Hazard avoidance guidance for planetary landing using a dynamic safety margin index[C]//*Proceedings of IEEE Aerospace Conference*. Big Sky, USA: IEEE, 2018.
- [17] YUAN X, YU Z S, CUI P Y, et al. Probability-based hazard avoidance guidance for planetary landing[J]. *Acta Astronautica*, 2018, 144: 12-22.
- [18] 崔祐涛, 张振江, 余萌. 多面体模型的Eros433引力场计算与分析[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2012, 44(3): 17-22, 80.
- CUI H T, ZHANG Z J, YU M. Computing and analysis of gravity field of Eros433 using polyhedron model[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2012, 44(3): 17-22, 80.
- [19] LUO Y Z, LIANG L, WANG H, et al. Quantitative performance for spacecraft rendezvous trajectory safety[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2011, 34(4): 1264-1269.

作者简介:

**赵冬越**(1995-), 男, 博士研究生, 主要研究方向: 小天体探测轨迹优化、制导与控制。

通信地址: 北京市海淀区中关村南大街5号北京理工大学宇航学院(100081)

E-mail: zhaody@bit.edu.cn

**崔平远**(1961-), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向: 飞行器自主导航与控制、深空探测器自主技术与轨道设计。**本文通信作者。**

通信地址: 北京市海淀区中关村南大街5号北京理工大学宇航学院(100081)

电话: (010)68918611

E-mail: cuipty@bit.edu.cn

# Adaptive Curvature Guidance for Flexible Landing on Small Celestial Bodies

ZHAO Dongyue<sup>1,2</sup>, ZHU Shengying<sup>1,2</sup>, CUI Pingyuan<sup>1,2</sup>

(1. Institute of Deep Space Exploration, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

2. Key Laboratory of Autonomous Navigation and Control for Deep Space Exploration, Ministry of Industry and Information Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** Flexible landing is a new way to prevent rebound and overturning in weak gravity environments of small celestial bodies and improve landing safety on these bodies. To realize obstacle avoidance of the flexible lander during the landing process, an adaptive curvature guidance method combined with convex programming and the concept of virtual safety boundary was proposed. Based on the geometric convex trajectory obtained through curvature guidance, a virtual safety boundary related to the structural characteristics of the flexible lander was constructed. The shape of the boundary was adaptively adjusted according to terrain obstacle information, and the optimal obstacle avoidance trajectory was solved via successive convex programming technique. The result of numerical simulation shows that the method proposed in this paper possesses satisfactory obstacle avoidance capability for the flexible landing mission in complex terrain conditions, which further improves the landing safety on small celestial bodies.

**Keywords:** small celestial body; flexible lander; curvature guidance; dynamic safety boundary; successive convex programming

## Highlights:

- The concept of virtual safety boundary is constructed according to the characteristics of the small celestial body flexible lander.
- The virtual safety boundary of flexible landing is generated adaptively through the curvature guidance technique and the model of expanding safety zone.
- The trajectory programming problem constrained by the virtual safety boundary is constructed for flexible landing, which can be solved quickly.

[责任编辑: 高莎, 英文审校: 宋利辉]