

# 多约束月面盘旋飞跃轨迹优化控制方法

陈上上<sup>1,2</sup>, 关轶峰<sup>1,2</sup>, 黄翔宇<sup>1,2</sup>

(1. 北京控制工程研究所, 北京 100094; 2. 空间智能控制技术国家重点实验室, 北京 100094)

**摘要:** 针对无平移发动机月球探测器的多约束盘旋飞跃问题, 给出了燃耗最优轨迹。盘旋飞跃划分为垂直上升段、平移段、垂直下降段, 垂直上升段与垂直下降段的最优控制均为Bang-Bang形式。研究平移段最优轨迹时, 考虑位置、速度、角速度等约束, 首次把优化问题的控制变量由推力转化为角速度, 然后基于Pontryagin极小值原理得到了最优角速度的初步形式, 接着通过对奇异点连续性、控制变量切换次数的研究, 得到最优角速度的最终形式由最大边值与最小边值组成且发生两次切换, 最后提供了一种求解切换点的数值方法。仿真结果表明, 该算法精度高、复杂度低, 适用于在线轨迹优化。

**关键词:** 多约束; 盘旋飞跃; Pontryagin极小值原理; 轨迹优化

**中图分类号:** V448.21

**文献标识码:** A

**文章编号:** 2096-9287(2024)01-0016-08

**DOI:** 10.15982/j.issn.2096-9287.2024.20230005

**引用格式:** 陈上上, 关轶峰, 黄翔宇. 多约束月面盘旋飞跃轨迹优化控制方法[J]. 深空探测学报(中英文), 2024, 11(1): 16-23.

**Reference format:** CHEN S S, GUAN Y F, HUANG X Y. Trajectory optimization for lunar hover hop with multi constraints[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2024, 11(1): 16-23.

## 引言

飞跃器可以完成诸多深空探测任务: 放置科学载荷到预定的月球表面, 作为信号站点构建国际月球网络、建立月球基地, 测绘月球表面以生成精确地图, 寻找有利资源等。另外月球飞跃器还能用于验证着陆技术、姿态确定技术、能源生成与存储技术、传感器技术、材料技术、通信技术, 为行星、卫星、小行星、彗星等天体探测提供有力的技术验证。中国未来发射的“嫦娥七号”飞跃器, 具备月面多次飞跃能力, 融合了着陆、巡视、上升等诸多技术, 既可以短航程飞跃障碍物, 又可以长航程飞入陨石坑底部的永久阴影区, 获取水冰是否存在的证据并采样飞出陨石坑。

飞跃兼行走的功能要求导致飞跃器系统配置复杂, 而多次飞跃的任务需求则对系统体积、重量、功耗、可靠性等方面均提出了十分严苛的指标要求, 因此飞跃器一般不再额外配置平移发动机, 而是通过偏转姿态实现水平机动, 同时轨迹规划需要重点考虑推进剂消耗。对于长航程的飞跃任务, 为了节约推进剂, 一般采用弹道飞跃轨迹: 先加速上升同时完成转弯, 到达一定高度后转无动力滑行, 下降过程一边动力减速一边调整姿态至竖直向上, 最终完成软着陆。

对于短航程的飞跃任务, 一般采用由垂直上升段、平移段、垂直下降段等3个阶段组成的盘旋飞跃轨迹<sup>[1]</sup>, 原因如下: 短航程飞跃任务中最优盘旋飞跃与最优弹道飞跃两者的推进剂消耗没有明显差异, 然而前者上升段与下降段没有转弯, 飞行过程更加安全; 前者平移段保持固定高度, 有利于采集地形数据、保证通信链路畅通; 另外, 盘旋飞跃发动机全程开机, 轨迹跟踪、应急处理等能力也更强。

文献[2-6]分别介绍了“嫦娥三号”“嫦娥四号”“嫦娥五号”“天问一号”、“牵牛星号”(Altair)的着陆与上升轨迹生成方法, 如果应用于月球陨石坑飞跃探测任务, 这些方法还需要进行适应性修改<sup>[7]</sup>。目前关于天体表面飞跃轨迹优化的研究多为弹道轨迹: 文献[8]针对探测器在小天体表面的弹跳式运动特点, 基于凸优化提出一种轨迹生成方法; 文献[9]把弹道轨迹优化问题转换为非线性规划问题, 利用SNOPT解算器对非线性规划问题进行求解; 文献[10]对月球表面长航程弹道式飞跃轨迹进行优化设计, 采用凸优化算法得到了优化轨迹。

基于上述原因, 有必要对短航程盘旋飞跃轨迹进行深入的研究, 以达到节约推进剂、完成更多探测任务、采集更多样品的目的。由于垂直上升段与垂直下

降段的初末速度均为零, 不需要调整姿态, 众所周知其最优轨迹均为Bang-Bang形式<sup>[11]</sup>; 平移段初末速度也为零, 需要调整俯仰姿态以产生水平速度, 另外为了保证敏感器正常使用, 还需要考虑飞行过程的角速度约束。本文针对无平移发动机月球探测器的平移段最小能耗问题, 从Pontryagin极小值原理出发, 寻找满足多种约束的最优轨迹。

## 1 问题描述

以目标着陆点为原点, 在射向平面内建立二维平动方程

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{z} = v_z \\ \dot{v}_x = F \cos \theta / m - g \\ \dot{v}_z = -F \sin \theta / m \\ \dot{m} = -F / I_{sp} \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x$ 、 $z$ 分别为高程与航程;  $v_x$ 、 $v_z$ 分别为天向速度与航向速度; 俯仰角 $\theta$ 定义为探测器纵轴与天向夹角(头超后为正);  $m$ 为探测器质量; 控制变量 $F$ 为主发动机推力大小(可实时调整);  $I_{sp}$ 为主发动机比冲;  $g$ 为月球引力加速度常数。各物理量含义如图1所示。

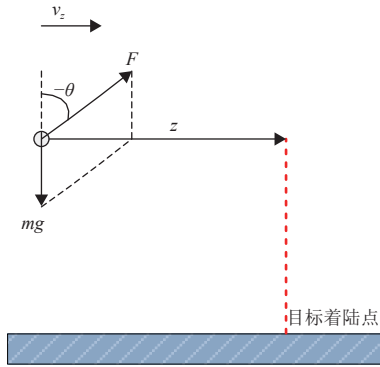


图1 平移示意图  
Fig. 1 Diagram of Hover

平移过程推力的垂向分量平衡重力, 垂向速度恒为零, 垂向位置恒定为常数, 因此可以忽略垂向运动方程; 考虑垂向力平衡关系后, 水平动力学方程中可用重力代替发动机推力; 另外, 为了便于考虑角速度约束, 还需要引入俯仰姿态运动方程。更改后的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{z} = v_z \\ \dot{v}_z = -g \tan \theta \\ \dot{m} = -\frac{mg}{I_{sp} \cos \theta} \\ \dot{\theta} = \omega_y \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $\omega_y$ 为俯仰角速度, 本文选取 $\omega_y$ 为新的待优化控制变量。

根据任务要求与平移轨迹特点, 状态变量的边界条件为

$$\begin{cases} z(0) = -L, z(t_f) = 0 \\ v_z(0) = 0, v_z(t_f) = 0 \\ m(0) = m_0 \\ \theta(0) = 0, \theta(t_f) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $L$ 、 $m_0$ 、 $t_f$ 分别为平移段的初始水平距离、初始质量、结束时刻。不失一般性, 令 $L > 0$ 。

考虑质量约束与垂向力平衡关系, 平移过程中的状态约束为

$$\begin{cases} m \geq m_{dry} \\ |\theta| \leq \cos^{-1} \left( \frac{mg}{F_{max}} \right) \end{cases} \quad (4)$$

其中:  $m_{dry}$ 为飞跃器干重;  $F_{max}$ 为主发动机最大推力。平移过程中的控制量约束为

$$|\omega_y| \leq \omega_{max} \quad (5)$$

其中,  $\omega_{max}$ 为角速度范围的边界。

平移轨迹的优化目标为

$$\min_{|\omega_y| \leq \omega_{max}} -m(t_f) \quad (6)$$

至此, 优化目标、优化参数、约束条件均设计完毕, 平移轨迹设计问题转化为一般的优化问题, 其数学描述如下

$$\begin{cases} \min_{\omega_y} -m(t_f) \\ \dot{z} = v_z \\ \dot{v}_z = -g \tan \theta \\ \dot{m} = -\frac{mg}{I_{sp} \cos \theta} \\ \dot{\theta} = \omega_y \\ z(0) = -L \\ v_z(0) = 0 \\ m(0) = m_0 \\ \theta(0) = 0 \\ z(t_f) = 0 \\ v_z(t_f) = 0 \\ \theta(t_f) = 0 \\ m \geq m_{dry} \\ |\theta| \leq \cos^{-1} \left( \frac{mg}{F_{max}} \right) \\ |\omega_y| \leq \omega_{max} \end{cases} \quad \text{s.t.} \quad (7)$$

## 2 最优轨迹

### 2.1 最优解形式

为了便于进一步处理, 做如下假设:

- 1) 推进剂足够多, 质量约束自然满足;
- 2) 航程足够小且发动机推力足够大, 姿态角约束自然满足。

即假设式 (4) 自然满足。优化问题 (7) 的哈密顿函数为

$$H = \lambda_1 v - \lambda_2 g \tan \theta - \lambda_3 \frac{mg}{I_{sp} \cos \theta} + \lambda_4 \omega_y \quad (8)$$

其中:  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\lambda_3$ 、 $\lambda_4$  为协态变量。根据Pontryagin极小值原理得到最优控制量

$$\omega_y = \begin{cases} \omega_{\max}, & \lambda_4 < 0 \\ -\omega_{\max}, & \lambda_4 > 0 \end{cases} \quad (9)$$

当  $\lambda_4 = 0$  时,  $\omega_y$  取值不定。因此  $\lambda_4 = 0$  的点称为奇异点。

### 2.2 奇异点连续性

优化问题 (7) 的正则方程为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \\ \dot{\lambda}_3 = \frac{g}{I_{sp} \cos \theta} \lambda_3 \\ \dot{\lambda}_4 = \frac{g}{(\cos \theta)^2} \lambda_2 + \frac{mg \sin \theta}{I_{sp} (\cos \theta)^2} \lambda_3 \end{cases} \quad (10)$$

协态变量的边界条件为

$$\lambda_3(t_f) = -1 \quad (11)$$

由式 (10) 可知

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = k_1 \\ \lambda_2(t) = -k_1 t + k_2 \\ \lambda_3(t) = k_3 \exp\left(\int_0^t \frac{g}{I_{sp} \cos \theta(\tau)} d\tau\right) \end{cases} \quad (12)$$

式中:  $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$  为常数。

由假设2) 可知

$$\cos \theta \geq \frac{mg}{F_{\max}} > 0 \quad (13)$$

由式 (11)、(12)、(13) 可知

$$k_3 < 0, \quad -1 \leq \lambda_3(t) < 0 \quad (14)$$

假设在某一连续区间  $[t', t'']$  上满足

$$\lambda_4 \equiv 0, \quad \dot{\lambda}_4 \equiv 0 \quad (15)$$

结合式 (10), 可知在区间  $[t', t'']$  上满足

$$\frac{g}{(\cos \theta)^2} \lambda_2 + \frac{mg \sin \theta}{I_{sp} (\cos \theta)^2} \lambda_3 \equiv 0 \quad (16)$$

另外, 由于末端时间自由问题的最优解满足  $H \equiv 0$ , 即

$$\lambda_1 v - \lambda_2 g \tan \theta - \lambda_3 \frac{mg}{I_{sp} \cos \theta} + \lambda_4 \omega_y \equiv 0 \quad (17)$$

在区间  $[t', t'']$  上对式 (17) 两边求导, 得

$$\begin{aligned} \lambda_1 v + \lambda_1 \dot{v} - \lambda_2 g \tan \theta - \lambda_2 g \frac{1}{(\cos \theta)^2} \omega_y - \\ \lambda_3 \frac{mg}{I_{sp} \cos \theta} - \lambda_3 \frac{mg \sin \theta}{I_{sp} (\cos \theta)^2} \omega_y \equiv 0 \end{aligned} \quad (18)$$

上式用到在区间  $[t', t'']$  上  $\lambda_4 \equiv 0$ 。化简式 (18) 得

$$-\left(\frac{g}{(\cos \theta)^2} \lambda_2 + \frac{mg \sin \theta}{I_{sp} (\cos \theta)^2} \lambda_3\right) \omega_y - \lambda_3 \frac{mg^2}{I_{sp}^2 (\cos \theta)^2} \equiv 0 \quad (19)$$

由式 (16)、(19) 得

$$\lambda_3 \frac{mg^2}{I_{sp}^2 (\cos \theta)^2} \equiv 0 \quad (20)$$

与

$$\lambda_3(t) < 0, \quad m > 0, \quad \cos \theta > 0 \quad (21)$$

矛盾。因此  $\lambda_4 = 0$  仅可能在有限孤立点成立。

### 2.3 控制量符号切换次数

结合2.1节与2.2节, 可知平移段最优控制量  $\omega_y$  只能取边界值  $\omega_{\max}$  或  $-\omega_{\max}$ 。本节研究最优控制量的符号切换次数。

对于  $v_z(0) = 0, \theta(0) = 0$  的零初始条件, 如不发生控制量切换, 则无法满足终端约束条件  $\theta(t_f) = 0, v_z(t_f) = 0$ ; 如果仅发生1次控制量切换, 假设切换时间为  $t_1$ , 由于  $\theta(0) = 0, \theta(t_f) = 0$ , 故  $t_1 = t_f/2$ , 由于  $\theta$  未变号, 因此  $\dot{v}_z$  也未变号, 且  $\dot{v}_z \neq 0$ , 这与  $v_z(0) = 0, v_z(t_f) = 0$  矛盾。因此仅0次或1次切换均不是零初始条件的可行解。

由式 (10) 与式 (12) 可得

$$\lambda_4 = \frac{g}{(\cos \theta)^2} \left(-k_1 t + k_2 + \frac{m \sin \theta}{I_{sp}} \lambda_3\right) = \frac{g}{(\cos \theta)^2} (l_2 - l_1) \quad (22)$$

式中:  $l_1 = k_1 t - k_2, l_2 = \frac{m \sin \theta}{I_{sp}} \lambda_3$ 。

$\lambda_4$  的符号由直线  $l_1$  与曲线  $l_2$  的相交情况决定。由式 (2)、(10) 得

$$d(m\lambda_3)/dt = 0 \quad (23)$$

即

$$\begin{cases} m\lambda_3 = m_0\lambda_3(0) = k_5 < 0 \\ l_2 = \frac{k_5}{I_{sp}} \sin\theta \end{cases} \quad (24)$$

式中:  $k_5$  为常数。对  $l_2$  求导得

$$\dot{l}_2 = \frac{k_5}{I_{sp}} \omega_y \cos\theta \quad (25)$$

由前文分析可知: 如果原问题存在最优解, 则至少发生两次切换, 假设第一次切换发生在  $t_1$  ( $0 < t_1 < t_f$ ) 时刻, 则在  $0 < t < t_1$  内满足

$$\begin{cases} \omega_y(t) = -\omega_{\max} \\ \lambda_4(t) > 0 \\ -\cos^{-1}\left(\frac{mg}{F_{\max}}\right) < \theta(t) < 0 \\ l_2(t) > 0 \\ \dot{l}_2(t) > 0 \end{cases} \quad (26)$$

下面根据  $k_1$ 、 $k_2$  的符号来分析最优控制量切换情况。

1)  $k_1 < 0$ ,  $k_2 < 0$

平移初期, 由于  $l_1(0) > l_2(0) = 0$ 、 $\dot{l}_1(t) < 0 < \dot{l}_2(t)$ , 假设不发生控制量切换情况下  $l_1$  与  $l_2$  在  $t'_1$  时刻相交, 则相交前

$$\dot{\lambda}_4(t) < 0, l_1(t) > l_2(t), t < t'_1 \quad (27)$$

因此控制量第一次切换时刻满足

$$t_1 \leq t'_1, \lambda_4(t_1) = 0 \quad (28)$$

否则若  $t_1 > t'_1$ , 则  $\lambda_4(t'_1) > 0$ , 而  $t > t'_1$  时  $\lambda_4(t) > 0$ , 从而全程满足  $\lambda_4(t) > 0$ , 将不会发生控制量切换, 不能满足终端约束。因此这种情况下只能  $t_1 \leq t'_1$ 。

控制量第一次切换后,  $l_1$  与  $l_2$  必然相交。否则若不相交, 则当  $t > t_1$  以后, 一直保持  $\dot{\lambda}_4 < 0$  与  $\lambda_4 < 0$ , 不会发生控制量第二次切换, 由前文分析可知, 控制量只切换一次不能满足终端约束。令第二次控制量切换时刻为  $t_2$ , 则在  $t_1 < t < t_2$  内,  $l_1$  与  $l_2$  可能多次相交, 且最后一次相交之后必然  $\dot{\lambda}_4 > 0$ , 否则  $\lambda_4(t_2) < 0$ 。令  $t_1 < t < t_2$  内,  $l_1$  与  $l_2$  最后一次相交时刻为  $t'_2$ , 则

$$\begin{cases} \lambda_4(t) < 0, \omega_y(t) = \omega_{\max}, t_1 < t < t_2 \\ \dot{\lambda}_4(t) > 0, l_1(t) < l_2(t), t'_2 < t < t_2 \end{cases} \quad (29)$$

因此控制量第二次切换时刻满足

$$\lambda_4(t_2) = 0, \dot{\lambda}_4(t_2) > 0, l_1(t_2) < l_2(t_2), t'_2 \leq t_2 < t_f \quad (30)$$

控制量第二次切换后

$$\begin{cases} \lambda_4(t) > 0, \omega_y(t) = -\omega_{\max}, t_2 < t < t_f \\ \dot{l}_2(t) > 0, \dot{l}_1(t) < 0, \dot{\lambda}_4(t) = \dot{l}_2(t) - \dot{l}_1(t) > 0 \end{cases} \quad (31)$$

之后一直保持  $\dot{\lambda}_4 > 0$  与  $\lambda_4 > 0$ 。

因此这种情况下发生两次控制量切换。

2)  $k_1 < 0$ ,  $k_2 \geq 0$

这种情况下,  $l_1(t) \leq 0$ ,  $l_2(t) \geq 0$  (因为  $-\cos^{-1}\left(\frac{mg}{F_{\max}}\right) < \theta(t) < 0$ ),  $\lambda_4(t) \geq 0$ 。由于  $\lambda_4(0) > 0$ , 因此  $\lambda_4(t) > 0$ , 将不会发生控制量切换, 无法满足终端约束。

3)  $k_1 > 0$

控制量第一次切换前,  $l_1$  与  $l_2$  可能多次相交, 也可能不相交。令控制量第一次切换前  $l_1$  与  $l_2$  最后一次相交时刻为  $t'_1$  (若未曾相交, 则  $t'_1 = 0$ ), 则在  $t'_1 < t < t_1$  内,  $\dot{\lambda}_4(t) < 0$  (即  $\dot{l}_1(t) > \dot{l}_2(t)$ ), 否则  $\lambda_4(t_1) \neq 0$  (因为在  $0 < t < t_1$  内,  $\lambda_4(t) > 0$ )。

控制量第一次切换后,  $\dot{l}_2(t) < 0$ , 而  $\dot{l}_1(t) > 0$ , 因此  $\dot{\lambda}_4(t) < 0$ ,  $\lambda_4(t) < 0$ 。这种情况下, 不会发生控制量第二次切换, 由前文分析可知, 控制量只切换一次不能满足终端约束。

4)  $k_1 = 0$ ,  $k_2 < 0$

在控制量第一次切换前, 如果  $l_1$  与  $l_2$  相交, 令相交时刻为  $t'_1$ , 则在  $t'_1 < t < t_1$  内,  $\dot{\lambda}_4(t) > 0$ , 与  $\lambda_4(t_1) = 0$  矛盾 (因为在  $0 < t < t_1$  内,  $\lambda_4(t) > 0$ )。因此, 在控制量第一次切换前,  $l_1$  与  $l_2$  不相交, 即在  $0 < t < t_1$  内:  $\dot{\lambda}_4(t) < 0$ ,  $\lambda_4(t) > 0$ 。

控制量第一次切换后,  $\dot{l}_2(t) < 0$ , 而  $\dot{l}_1(t) = 0$ , 因此  $\dot{\lambda}_4(t) < 0$ ,  $\lambda_4(t) < 0$ 。这种情况下, 不会发生控制量第二次切换, 由前文分析可知, 控制量只切换一次不能满足终端约束。

5)  $k_1 = 0$ ,  $k_2 \geq 0$

这种情况下,  $l_1(t) \leq 0$ ,  $l_2(t) \geq 0$  (因为  $-\cos^{-1}\left(\frac{mg}{F_{\max}}\right) < \theta(t) < 0$ ),  $\lambda_4(t) \geq 0$ 。由于  $\lambda_4(0) > 0$ , 因此  $\lambda_4(t) > 0$ , 将不会发生控制量切换, 无法满足终端约束。

综上所述, 只有第一种情况 ( $k_1 < 0$ ,  $k_2 < 0$ ) 能够满足终端约束, 而且最优控制量只能切换两次。

### 3 数值求解方法

上文已经证明平移段最优角速度只能取最大边值或最小边值, 且发生两次符号切换。本节通过数值方法寻找切换时刻, 从而得到原问题的最终解。

显然在初始轨迹与终端轨迹上, 角速度取值为

$$\omega_y = -\omega_{\max} \quad (32)$$

在过渡轨迹上, 角速度取值为

$$\omega_y = \omega_{\max} \quad (33)$$

如图2、图3所示, 设初始轨迹、过渡轨迹、终端轨迹的结束时刻分别为 $t_1$ 、 $t_2$ 、 $t_3$ , 过渡轨迹俯仰角小于零与大于零的飞行时间分别为 $t_{21}$ 、 $t_{22}$ ( $t_2 - t_1 = t_{21} + t_{22}$ ), 则根据俯仰角与角速度关系得

$$\begin{cases} t_{21} = t_1 \\ t_{22} = t_3 - t_2 \end{cases} \quad (34)$$

由于初始速度与终端速度都为零, 结合动力学方程(2)得

$$\int_0^{t_{21}} \tan(\omega_{\max} t) dt = \int_0^{t_{22}} \tan(\omega_{\max} t) dt \quad (35)$$

即 $t_1 = t_{21} = t_{22} = t_3 - t_2$ 。

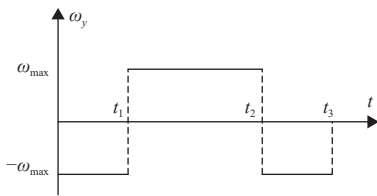


图2 最优角速度示意图

Fig. 2 Diagram of optimal angle rate

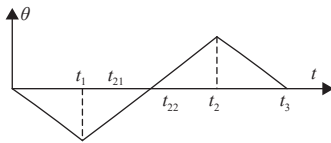


图3 最优姿态角示意图

Fig. 3 Diagram of optimal attitude angle

平移段推进剂最优问题转化为: 寻找 $t_1$ , 使得终端位置为零。该问题可以通过黄金分割法进行一维数值搜索求解。

## 4 算例

以月球南极陨石坑飞跃探测任务的某飞跃器为例, 各参数取值为:  $I_{sp} = 2951.5$  Ns/kg、 $m_0 = 348.9$  kg、 $L = 20$  m、 $F_{\max} = 1710$  N、 $\omega_{\max} = 3^\circ/s$ 。

采用本文方法解得 $t_1 = 4.8847$  s, 在普通计算机Windows XP系统中用Matlab仿真, 规划算法平均耗时0.16 s, 能满足在线规划要求。最优角速度如图4所示, 对应的各状态量见图5~9。图8表明推进剂消耗3.8 kg, 远小于携带的推进剂总质量150 kg, 因此式(4)中第一式成立; 图9表明最优轨迹用到的最大推

力为582.6 N, 远小于实际推力器能够提供的最大推力, 因此式(4)中第二式成立。上述分析同时也表明2.1节的假设1)、2)均成立。

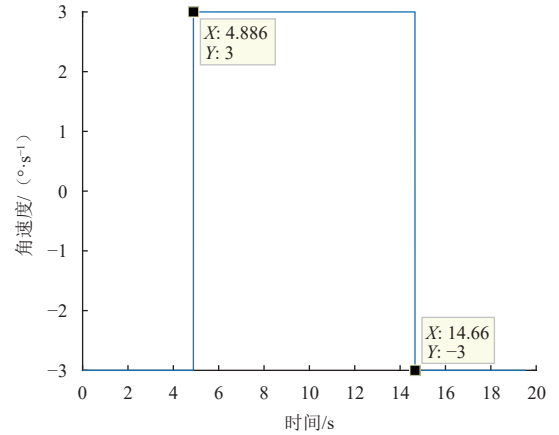


图4 最优角速度剖面

Fig. 4 Profile of optimal angle rate

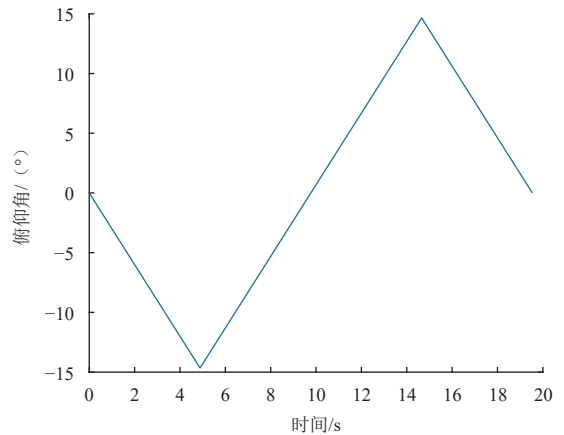


图5 最优轨迹俯仰角曲线

Fig. 5 Curve of pitch angle along optimal trajectory

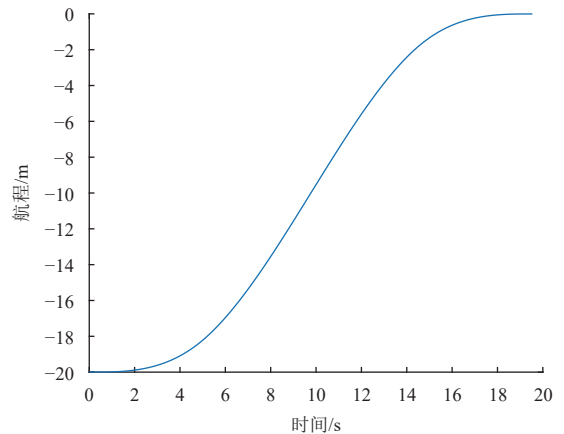


图6 最优轨迹航程曲线

Fig. 6 Curve of downrange along optimal trajectory

态变量及相关参数见图10~12。图10验证了 $\lambda_3$ 、 $k_5$ 符合式(14)中 $-1 \leq \lambda_3(t) < 0$ 与式(24)中 $k_5 < 0$ ,

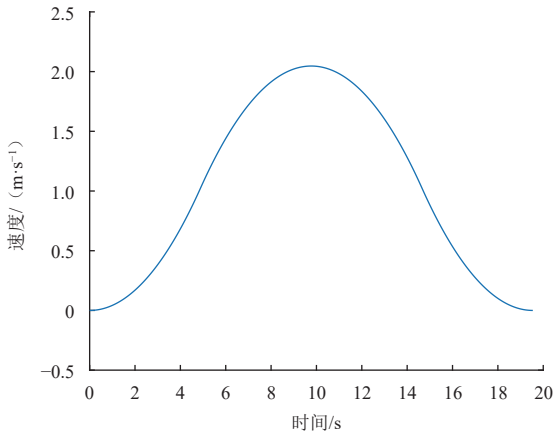


图 7 最优轨迹速度曲线

Fig. 7 Curve of velocity along optimal trajectory

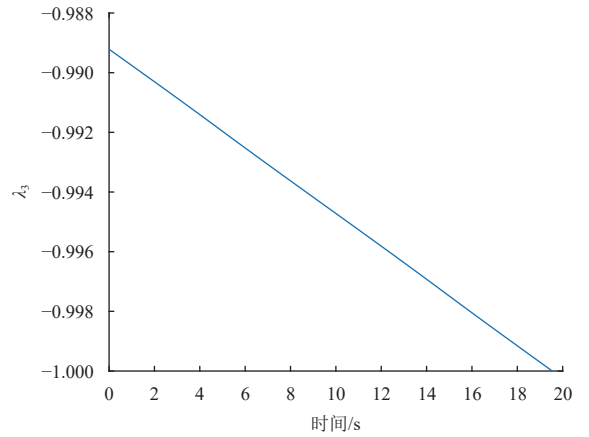


图 10  $\lambda_3$  曲线

Fig. 10 Curve of  $\lambda_3$

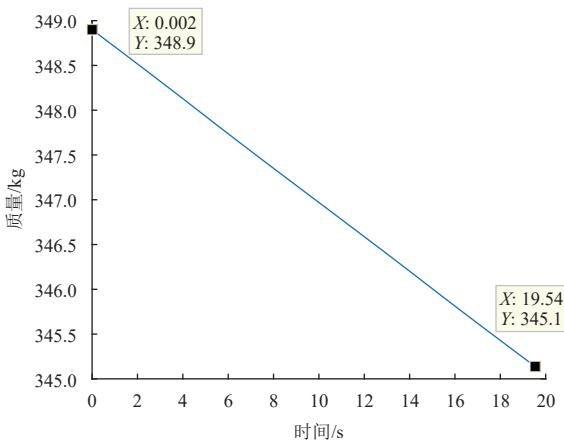


图 8 最优轨迹质量曲线

Fig. 8 Curve of mass along optimal trajectory

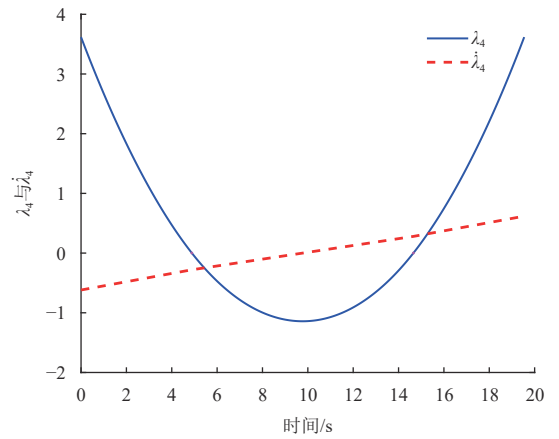


图 11  $\lambda_4$  与  $\dot{\lambda}_4$  曲线

Fig. 11 Curves of  $\lambda_4$  and  $\dot{\lambda}_4$

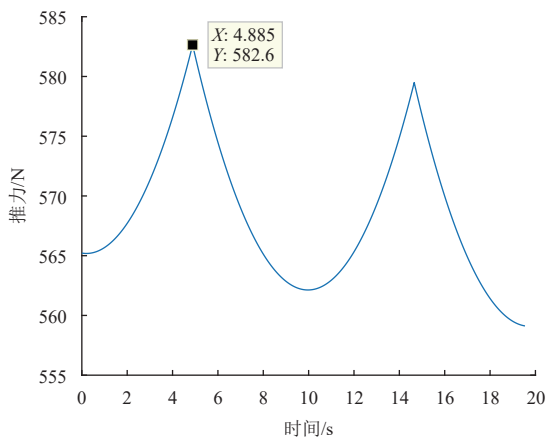


图 9 最优轨迹推力曲线

Fig. 9 Curve of thrust along optimal trajectory

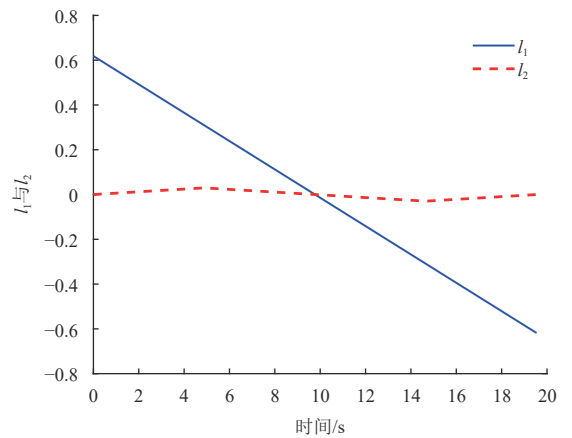


图 12  $l_1$  与  $l_2$  曲线

Fig. 12 Curves of  $l_1$  and  $l_2$

图11验证了 $k_1$ 、 $k_2$ 的符号以及 $\lambda_4$ 与 $\dot{\lambda}_4$ 符号变化符合2.3节的分析, 图12验证了 $l_1$ 与 $l_2$ 大小关系符合2.3节( $k_1 < 0$ ,  $k_2 < 0$ 情况下)的分析。

## 5 结 论

针对无平移发动机月球探测器的多约束盘旋飞跃问题, 本文选取角速度为控制变量, 基于Pontryagin极小值原理, 通过对奇异点连续性的研究, 证明了能耗

最优轨迹的角速度为Bang-Bang形式。对控制量切换次数的进一步研究表明最优轨迹发生2次角速度切换。在此基础上,开发了一种耗时0.16 s的黄金分割数值求解方法,按照这种方法设计的最优轨迹,可以保证满足位置、速度、角速度等多种约束条件,仿真算例验证了该方法的有效性。

该方法为月面短航程飞跃探测任务提供了一种可行的轨迹在线生成方法,具有很好的工程参考价值。后续有待设计强鲁棒的制导律,以实现大干扰情况下仍能跟踪生成的最优轨迹。

## 参 考 文 献

- [1] MIDDLETON A, PASCHALL II S, COHANIM B. Small lunar lander/hopper performance analysis[C]//Proceedings of IEEE Aerospace Conference Proceedings. MT, USA: IEEE, 2010.
- [2] 张洪华, 关轶峰, 黄翔宇, 等. 嫦娥三号着陆器动力下降的制导导航与控制[J]. *中国科学: 技术科学*, 2014, 44(4): 377-384.  
ZHANG H H, GUAN Y F, HUANG X Y, et al. Guidance navigation and control for Chang'e-3 powered descent[J]. *Scientia Sinica Technologica*, 2014, 44(4): 377-384.
- [3] 张洪华, 关轶峰, 程铭, 等. 嫦娥四号着陆器制导导航与控制系统[J]. *中国科学: 技术科学*, 2019, 49(12): 1418-1428.  
ZHANG H H, GUAN Y F, CHENG M, et al. Guidance navigation and control for Chang'e-4 lander[J]. *Scientia Sinica Technologica*, 2019, 49(12): 1418-1428.
- [4] 张洪华, 李骥, 于萍, 等. 嫦娥五号月面起飞上升制导导航与控制技术[J]. *中国科学: 技术科学*, 2021, 51(8): 921-937.  
ZHANG H H, LI J, YU P, et al. Guidance navigation and control technology for the lunar ascent vehicle of Chang'e-5 mission[J]. *Scientia Sinica Technologica*, 2021, 51(8): 921-937.
- [5] HUANG X Y, XU C, HU J C, et al. Powered-descent landing GNC system design and flight results for Tianwen-1 mission[J]. *Astrodynamics*, 2022, 6(1): 3-16
- [6] KOS L D, POLSGROVE T T, SOSTARIC R R, et al. Altair descent and ascent reference trajectory design and initial dispersion analyses[C]//Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. Toronto, Ontario Canada: AIAA, 2010.
- [7] 陈上上, 关轶峰, 于萍, 等. 基于粒子群优化的月球陨石坑探测轨迹规划[J]. *深空探测学报(中英文)*, 2020, 7(3): 271-277.  
CHEN S S, GUAN Y F, YU P, et al. Trajectory planning for lunar crater exploration based on particle swarm optimization[J]. *Journal of Deep Space Exploration*, 2020, 7(3): 271-277.
- [8] LIU Y J, ZHU S Y, CUI P Y, et al. Hopping trajectory optimization for surface exploration on small bodies[J]. *Advances in Space Research*, 2017, 60(1): 90-102.
- [9] MA L, WANG K X, XU Z H, et al. Trajectory optimization for lunar rover performing vertical takeoff vertical landing maneuvers in the presence of terrain[J]. *Acta Astronautica*, 2018, 146: 289-299.
- [10] 王浩帆, 张洪华, 王泽国, 等. 一种月球表面飞跃转移轨迹设计方法[J]. *中国空间科学技术*, 2021, 41(2): 112-124.  
WANG H F, ZHANG H H, WANG Z G, et al. An optimal trajectory design for lunar surface hop[J]. *Chinese Space Science and Technology*, 2021, 41(2): 112-124.
- [11] MEDITCH J S. On the problem of optimal thrust programming for a lunar soft landing[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1964, 9(4): 477-484.

作者简介:

陈上上(1982-), 男, 高级工程师, 主要研究方向: 深空探测, 卫星控制, 再入制导控制。

通信地址: 北京市海淀区友谊路104号(100094)

电话: (010)68111182

E-mail: 252154850@qq.com

# Trajectory Optimization for Lunar Hover Hop with Multi Constraints

CHEN Shangshang<sup>1,2</sup>, GUAN Yifeng<sup>1,2</sup>, HUANG Xiangyu<sup>1,2</sup>

(1. Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100094, China;

2. National Key Laboratory Science and Technology on Space Intelligent Control, Beijing 100094, China)

**Abstract:** The multi-constrained trajectory of minimal fuel consumption was achieved in this paper for the lunar hover hop without lateral thrusters. The hover hop was divided to 3 phases: the vertical rise, the horizontal traverse and the vertical descent. The optimal control of the vertical rise and the vertical descent was bang-bang function. For the first time the control variable of the horizontal traverse was converted from thrust to angle rate, with position, velocity and angle rate considered. The preliminary form of the optimal angle rate for the horizontal traverse was developed by application of the Pontryagin's minimum principle. With further study on the continuity of the singular point and the number of switching times of the control variable, it was confirmed that the optimal angle rate program consisted of either the maximum or the minimum and there were 2 switchings. A numerical approach to searching the switching points was presented. Simulation results show that the approach with high accuracy and low complexity can potentially be implemented onboard for trajectory optimization.

**Keywords:** multi constrained; hover hop; Pontryagin's minimum principle; trajectory optimization

## Highlights:

- The multi-constrained trajectory of minimal fuel consumption is realized this paper for the lunar hover hop without lateral thrusters.
- The optimal angle rate program consists of either the maximum or the minimum and there are 2 switchings.
- A numerical approach to searching the switching points is presented.

[责任编辑: 高莎, 英文审校: 宋利辉]