

空间引力波探测航天器高精度状态估计器设计

张东林¹, 曹一凡¹, 段战胜¹, 王鹏程², 郭明², 张永合²

(1. 西安交通大学 自动化科学与工程学院, 西安 710049; 2. 中国科学院 微小卫星创新研究院, 上海 201204)

摘要: 基于星敏感器和惯性传感器等多源异构数据, 提出了一种线性化四元数量测的高性能卡尔曼滤波算法。根据空间引力波探测超稳超静平台特性, 通过对星敏感器四元数测量在航天器系统姿态小角度变化下的近似变形构造新的线性伪量测, 从而满足卡尔曼滤波器的线性假设条件。结合航天器系统离散时间状态空间模型以及多传感器数据, 设计线性化四元数量测的卡尔曼滤波算法, 以实现航天器系统状态的高精度在轨估计。通过仿真实验以及性能分析验证了该算法可以有效提高系统状态量估计精度, 满足空间引力波探测任务航天器姿态量测的精度需求, 为高精度控制提供高精度观测信息。

关键词: 引力波探测; 非线性量测; 卡尔曼滤波

中图分类号: V11

文献标识码: A

文章编号: 2096-9287(2023)05-0557-08

DOI: 10.15982/j.issn.2096-9287.2023.20230035

引用格式: 张东林, 曹一凡, 段战胜, 等. 空间引力波探测航天器高精度状态估计器设计[J]. 深空探测学报(中英文), 2023, 10(5): 557-564.

Reference format: ZHANG D L, CAO Y F, DUAN Z S, et al. High precision state estimation method design for space-based gravitational wave detection spacecraft[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2023, 10(5): 557-564.

引言

近年来, 引力波探测已经成为当代物理学重要的前沿领域之一。其中空间引力波探测是指在太空中利用卫星编队或星座构建大型激光干涉仪, 实现对中低频引力波信号的探测^[1]。欧洲航天局(European Space Agency, ESA)于1993年最早提出了空间引力波探测计划“激光干涉测量空间天线”(Laser Interferometer Space Antenna, LISA)项目, 中国在2008年开始探讨空间引力波探测的可行性, 先后开展了概念与方案设计、关键科学载荷研制等, 并于2014年和2016年提出了“天琴计划”和“太极计划”^[2-3]。

激光干涉测量对卫星无拖曳与姿态控制系统提出了极高的要求。引力波信号在空间中极其微弱, 而探测环境存在着强噪声的干扰, 因此探测系统必须保持足够的稳定才有可能捕获引力波信号^[4-5]。此外, 由于激光器功率有限且测量光束发散角很小, 需要卫星进行精确的姿态控制实现高精度、高稳定度指向。卫星高精度姿态估计作为控制律设计和执行机构高精度执行的前提, 显得尤为重要^[6-7]。

卫星姿态确定方法通常可以分为确定性方法和状态估计法两类^[8-9]。确定性方法无需姿态的先验知识和动态变化信息, 直接利用各个时刻的矢量观测进行姿

态确定^[10]。TRIAD (TRIaxial Attitude Determination) 姿态确定方法是第一个使用两个矢量观测确定航天器姿态的广泛普及方法^[11]。除此之外还有QUEST (QUaternion ESTimator) 法^[11]、SVD (Singular Value Decomposition) 法^[12]、FOAM (Fast Optimal Attitude Matrix) 法^[12]以及Euler-q法^[13]等。确定性方法具有明确的物理或几何意义, 但该类方法要求参考矢量的参数足够精确。状态估计法是结合传感器测量方程和卫星状态方程, 基于一定的估计准则, 实时得到卫星状态变量的最优估计方法^[14]。与确定性方法不同, 状态估计法通常能提供被估计量的统计最优解。在一定程度上抑制了某些不确定性因素的影响, 提高姿态确定的精度, 因此在高精度姿态确定系统中多采用状态估计法。

卡尔曼滤波器已经在航天器姿态估计领域得到了广泛的应用^[15]。为了更好地适应航天器动力学和量测模型的非线性, 扩展卡尔曼滤波器得到了推广。随着四元数被用于姿态描述参数, Lefferts^[16]提出了基于四元数的扩展卡尔曼姿态估计方法。然而使用四元数参数化的传统卡尔曼滤波器存在协方差矩阵奇异的问题。随着星载计算机性能的提高, 一些先进的非线性滤波算法应用到了卫星姿态估计系统中。无迹卡尔曼

滤波^[17-18], 中心差分卡尔曼滤波算法^[19]以及粒子滤波算法^[20]相较于扩展卡尔曼方法具有更快的收敛速度和更高的精度。此外, 由于基于容积卡尔曼滤波^[21]的容积四元数估计器更适用于高维的非线性系统, 因此它也被广泛应用于航天器系统状态估计中。

基于星敏感器和惯性传感器测量的空间引力波探测航天器系统状态估计本质上是一个非线性约束估计融合问题。上述已有的常规非线性滤波算法无法直接应用于该航天器系统状态估计问题。在本文中, 提出了一种线性化四元数量测的卡尔曼滤波算法, 以实现空间引力波探测任务中航天器状态的高精度实时估计。该方法结合平台的超稳超静特性, 通过对四元数姿态测量在航天器小角度变化下的近似变形来满足卡尔曼滤波器的线性假设条件, 并结合航天器系统离散时间状态空间模型和多源异构数据实现航天器系统状态的高精度估计。在空间引力波探测任务中的捕获建链阶段, 指向估计精度应达到0.1 μrad 量级。航天器系统具有高精度的测量传感器, 状态估计任务则需要满足航天器姿态量测误差压缩率高于40%。设计的状态估计器将系统传感器噪声进一步压低了至少一个数量级, 满足空间引力波探测航天器系统状态高精度实时估计的需要, 是引力波探测重大科学实验计划顺利实施的前提。

1 状态空间建模

1.1 状态方程建模

应用牛顿-欧拉公式, 可得到空间引力波探测中航天器系统动力学模型, 其线性化后相应的二阶微分方程为

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) = M\Omega\dot{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + \bar{\mathbf{F}}\mathbf{d}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (1)$$

其中: 状态向量 $\mathbf{x} = [\mathbf{r}_1^T, \mathbf{r}_2^T, \boldsymbol{\alpha}_1^T, \boldsymbol{\alpha}_2^T, \mathbf{r}_B^T, \boldsymbol{\alpha}_B^T]^T \in \mathbf{R}^{18}$, \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 、 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 、 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别表示两块自由悬浮检验质量块 (Test Mass, T/M) 相对于IS外壳坐标系 (IS housing reference frame) 的3维位置信息和角度信息, \mathbf{r}_B 、 $\boldsymbol{\alpha}_B$ 分别表示机体相对于惯性坐标系的3维位置和角度信息; $M \in \mathbf{R}^{18 \times 18}$ 为满秩质量矩阵; $\Omega \in \mathbf{R}^{18 \times 18}$ 为刚度矩阵; $\bar{\mathbf{B}} \in \mathbf{R}^{18 \times 18}$ 为控制输入矩阵; $\bar{\mathbf{F}} \in \mathbf{R}^{18 \times 12}$ 为打开两个微推进器时的扰动输入矩阵; $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^{18}$ 是解耦控制输入; $\mathbf{d}(t) \in \mathbf{R}^{12}$ 是两个微推进器受到的扰动; $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^{18}$ 是机体受到的太阳光压扰动以及两个测试质量块的静电悬浮系统所受到的扰动。

由于 M 阵可逆, 将等式两侧同乘 M^{-1} , 得到

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \Omega\dot{\mathbf{x}}(t) + M^{-1}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + M^{-1}\bar{\mathbf{F}}\mathbf{d}(t) + M^{-1}\mathbf{w}(t) \quad (2)$$

令状态 $\mathbf{x}(t) = [\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t)]^T \in \mathbf{R}^{36}$, 可以得到相应的状态演化方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}'\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}'\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}'\mathbf{d}(t) + \mathbf{G}'\mathbf{w}(t) \quad (3)$$

其中: $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{18 \times 18} & \mathbf{I}_{18 \times 18} \\ \mathbf{M}^{-1}\Omega & \mathbf{0}_{18 \times 18} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{36 \times 36}$, $\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{18 \times 18} \\ \mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{36 \times 18}$, $\mathbf{F}' = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{18 \times 24} \\ \mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{F}} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{36 \times 24}$, $\mathbf{G}' = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{18 \times 18} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{36 \times 18}$ 。

由上述状态空间建模得到系统连续时间的状态空间描述, 已知这是一个近似线性时不变的系统, 假设系统采样周期为 T , 由线性系统理论可知, 连续时间的LTI (Linear Time Invariant) 系统的非齐次方程的解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}'(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}'(t-\tau)}\mathbf{B}'\mathbf{u}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}'(t-\tau)}\mathbf{F}'\mathbf{d}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}'(t-\tau)}\mathbf{G}'\mathbf{w}(\tau)d\tau \quad (4)$$

对于式(4), 考虑从 $t_0 = kT$ 到 $t = (k+1)T$ 之间的时间段, 并由于这一时间段内 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT)$, $\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}(kT)$ 以及 $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(kT)$, 可以得到

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}'T}\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}'[(k+1)T-\tau]}\mathbf{B}'d\tau \cdot \mathbf{u}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}'[(k+1)T-\tau]}\mathbf{F}'d\tau \cdot \mathbf{d}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}'[(k+1)T-\tau]}\mathbf{G}'d\tau \cdot \mathbf{w}(kT) \quad (5)$$

对于积分项, 令 $t = (k+1)T - \tau$, 则 $d\tau = -dt$ 。由于在一个采样周期内系统可看作LTI系统, 因此可以将积分项内的 \mathbf{B}' 、 \mathbf{F}' 、 \mathbf{G}' 项移到积分项外。通过化简整理可得

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}'T}\mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}'t}dt \cdot \mathbf{B}'\mathbf{u}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}'t}dt \cdot \mathbf{F}'\mathbf{d}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}'t}dt \cdot \mathbf{G}'\mathbf{w}(kT) \quad (6)$$

将式(6)简记为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{F}\mathbf{d}(k) + \mathbf{G}\mathbf{w}(k) \quad (7)$$

其中: $\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}'T}$; $\mathbf{B} = \int_0^T e^{\mathbf{A}'t}dt \cdot \mathbf{B}'$; $\mathbf{F} = \int_0^T e^{\mathbf{A}'t}dt \cdot \mathbf{F}'$; $\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}'t}dt \cdot \mathbf{G}'$ 。由此得到离散化后的系统的状态方程表示。

备注: 由于航天器系统动力学模型中质量矩阵 M 是非对角矩阵, 因此航天器本体姿态和两个检验质量块的位姿存在耦合关系。如果不考虑两个检验质量块的位姿信息, 就无法实现航天器姿态的高精度估计。此外, 在空间引力波探测任务中, 星间激光链路

的建立和保持需要协调控制卫星及两个检验质量块来完成。因此, 在航天器姿态估计中, 需要同时估计两个检验质量块的位姿信息。

1.2 量测方程建模

首先利用姿态四元数定义卫星本体相对地面惯性参考坐标系的姿态为 $\mathbf{q}_{ib} \in R^4$, 记为 $\mathbf{q}_{ib} = [q_{ib,0}, q_{ib,1}, q_{ib,2}, q_{ib,3}]^T$, 有如下形式

$$\mathbf{q}_{ib} = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{e}_1, \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{e}_2, \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{e}_3 \right]^T$$

其中: $\mathbf{e} = [e_1, e_2, e_3]^T$ 表示欧拉轴的三维方向向量且满足 $\|\mathbf{e}\|_2 = 1$, θ 表示欧拉角参数。姿态四元数的4个参数非独立, 满足以下条件

$$q_{ib,0}^2 + q_{ib,1}^2 + q_{ib,2}^2 + q_{ib,3}^2 = 1$$

系统观测部分包含对双测试质量位姿的12维测量 $\check{\mathbf{p}} = [\check{r}_1^T, \check{r}_2^T, \check{\alpha}_1^T, \check{\alpha}_2^T]^T$, 以及星敏传感器对卫星本体姿态四元数的测量值 \check{q}_{ib} 。系统量测方程为

$$\begin{cases} \check{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_p \\ \check{q}_{ib} = \mathbf{v}_{ib} \otimes \mathbf{q}_{ib} \end{cases} \quad (8)$$

其中: 测试质量测量 $\check{\mathbf{p}}$ 与真实状态 \mathbf{p} 、量测噪声 \mathbf{v}_p 之间关系暂定为线性相加。对于星敏传感器, 假设量测噪声同样以姿态四元数形式给出, 记为 \mathbf{v}_{ib} 。量测值 \check{q}_{ib} 、测量噪声 \mathbf{v}_{ib} 、姿态真值 \mathbf{q}_{ib} 之间关系暂定为四元数乘法运算。然后 $\check{q}_{ib} = \mathbf{v}_{ib} \otimes \mathbf{q}_{ib}$ 的展开形式为

$$\begin{bmatrix} \check{q}_{ib,0} \\ \check{q}_{ib,1} \\ \check{q}_{ib,2} \\ \check{q}_{ib,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ib,0} & -v_{ib,1} & -v_{ib,2} & -v_{ib,3} \\ v_{ib,1} & v_{ib,0} & v_{ib,3} & -v_{ib,2} \\ v_{ib,2} & -v_{ib,3} & v_{ib,0} & v_{ib,1} \\ v_{ib,3} & v_{ib,2} & -v_{ib,1} & v_{ib,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{ib,0} \\ q_{ib,1} \\ q_{ib,2} \\ q_{ib,3} \end{bmatrix} \quad (9)$$

2 量测线性化

从式(8)中可以看出系统关于卫星本体姿态四元数的量测是非线性的, 由于系统动力学方程复杂且估计状态维数高、初始化难度大, 直接应用非线性滤波方法进行状态估计会出现收敛缓慢、容易发散等问题。现将卫星本体姿态四元数的量测部分进行线性化处理。

根据欧拉定理, 刚体绕固定点的位移也可以是绕该点的若干次有限位移的合成, 在用姿态四元数表示姿态参数的方法中, 连续两次转动后的姿态四元数等于各次转动的四元数的乘积。基于星敏传感器读出, 可以得到偏差四元数测量

$$\Delta \mathbf{q}^m = \mathbf{q}_r \otimes \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}_n = \Delta \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}_n \quad (10)$$

展开形式为

$$\begin{bmatrix} \Delta q_0^m \\ \Delta q_1^m \\ \Delta q_2^m \\ \Delta q_3^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{n0} & -q_{n1} & -q_{n2} & -q_{n3} \\ q_{n1} & q_{n0} & q_{n3} & -q_{n2} \\ q_{n2} & -q_{n3} & q_{n0} & q_{n1} \\ q_{n3} & q_{n2} & -q_{n1} & q_{n0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_0 \\ \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \Delta q_3 \end{bmatrix}$$

其中: \mathbf{q}_r 为设定参考姿态; \mathbf{q} 为卫星的真实姿态; \mathbf{q}_n 为噪声。

将量测方程中姿态四元数的部分进行线性化处理, 卫星本体的角度参数与姿态四元数量测之间的相互转换关系如下

$$\alpha_B^m = \begin{bmatrix} \alpha^m \\ \beta^m \\ \gamma^m \end{bmatrix} = 2\mathbf{H}_q \mathbf{q}_r \otimes \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}_n \quad (11)$$

其中: $\mathbf{H}_q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 式(11)可以进一步表达为

$$\alpha_B^m = \begin{bmatrix} \alpha^m \\ \beta^m \\ \gamma^m \end{bmatrix} = 2\mathbf{H}_q \mathbf{q}_r \otimes \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}_n = 2\mathbf{H}_q \Delta \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}_n \quad (12)$$

将式(12)进一步展开

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha^m \\ \beta^m \\ \gamma^m \end{bmatrix} &= 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 & -v_1 & -v_2 & -v_3 \\ v_1 & v_0 & v_3 & -v_2 \\ v_2 & -v_3 & v_0 & v_1 \\ v_3 & v_2 & -v_1 & v_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_0 \\ \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \Delta q_3 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} v_1 & v_0 & v_3 & -v_2 \\ v_2 & -v_3 & v_0 & v_1 \\ v_3 & v_2 & -v_1 & v_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_0 \\ \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \Delta q_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

由于四元数的参数非独立且满足条件 $\|\mathbf{q}\|_2 = 1$, 在欧拉角为小角度 ($\Delta q_0 \approx 1$) 的情况下, 有以下近似关系

$$\alpha \approx 2\Delta q_1, \beta \approx 2\Delta q_2, \gamma \approx 2\Delta q_3 \quad (14)$$

将式(12)代入式(13)重写为

$$\begin{bmatrix} \alpha^m \\ \beta^m \\ \gamma^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_0 & v_3 & -v_2 \\ v_2 & -v_3 & v_0 & v_1 \\ v_3 & v_2 & -v_1 & v_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\Delta q_0 \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (15)$$

展开可得

$$\begin{cases} \alpha^m = v_0\alpha + v_1 \times 2\Delta q_0 + v_3\beta - v_2\gamma \\ \beta^m = v_0\beta + v_2 \times 2\Delta q_0 - v_3\beta + v_1\gamma \\ \gamma^m = v_0\gamma + v_3 \times 2\Delta q_0 + v_2\beta - v_1\gamma \end{cases} \quad (16)$$

由此得到系统关于姿态四元数的非线性量测部分的线性化结果。

3 滤波算法

对于给定的星敏感器与静电读出系统,可以测量两个测试质量的位置姿态信息以及卫星本体在惯性坐标系下的角度信息,但是无法得到卫星在惯性坐标系下的位置信息。由于系统量测 $z(t)$ 缺少关于卫星在惯性坐标系下位置信息的三维量测,因此量测 $z(t) = [r_1^T, r_2^T, \alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_B^T]^T \in \mathbf{R}^{15}$ 。单星系统的量测方程为

$$z(t) = \mathbf{H}x(t) + v(t) \quad (17)$$

其中: $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{15 \times 36}$ 是线性化后的测量矩阵; $v(t) \in \mathbf{R}^{15}$ 是量测系统的读出噪声。在相邻的两个采样时刻之间,读出噪声 $v(t)$ 通过零阶保持器保持不变。此时量测方程是状态向量和读出噪声的加性组合,即得到离散时间量测方程为

$$z(k) = \mathbf{H}x(k) + v(k) \quad (18)$$

通过系统离散化和量测线性化处理,将基于星敏感器非线性量测的卫星动力学系统和量测系统转换为满足卡尔曼滤波线性高斯假设的离散状态空间模型,即

$$\begin{cases} x(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}u(k) + \mathbf{F}d(k) + \mathbf{G}w(k) \\ z(k) = \mathbf{H}x(k) + v(k) \end{cases} \quad (19)$$

其中:待估计量为 $x(k) = [\hat{x}(k), \bar{x}(k)]^T \in \mathbf{R}^{36}$, $z(k) \in \mathbf{R}^{15}$ 包含两个测试质量6维位姿信息和卫星本体的三维姿态信息。此时系统的过程噪声 $d(k) \sim \mathcal{N}(0, Q_d)$, $w(k) \sim \mathcal{N}(0, Q_w)$ 和量测噪声 $v(k) \sim \mathcal{N}(0, R)$ 均为白噪声。

基于卡尔曼滤波原理,可以得到线性化四元数量测的高性能状态估计算法。预测

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1|k) = \mathbf{A}\hat{x}(k|k) + \mathbf{B}u(k) \\ \mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k|k)\mathbf{A}^T + \mathbf{F}\mathbf{Q}_d\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}_w\mathbf{G}^T \\ \hat{z}(k+1|k) = \mathbf{H}\hat{x}(k+1|k) \\ \mathbf{S}(k+1) = \mathbf{H}\mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}^T + \mathbf{R} \end{cases} \quad (20)$$

更新

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}^T\mathbf{S}^{-1}(k+1) \\ \hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + \mathbf{K}_{k+1}(z_k - \mathbf{H}\hat{x}(k+1|k)) \\ \mathbf{P}(k+1|k+1) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{H}]\mathbf{P}(k+1|k)[\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{H}]^T + \\ \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{R}\mathbf{K}_{k+1}^T \end{cases} \quad (21)$$

其中: $\hat{x}(k+1|k)$ 为状态预测; $\mathbf{P}(k+1|k)$ 为状态预测MSE矩阵; $\hat{z}(k+1|k)$ 为量测预测; $\mathbf{S}(k+1)$ 为量测预测协方差矩阵; \mathbf{K}_{k+1} 为增益矩阵; $\hat{x}(k+1|k+1)$ 为状态更新; $\mathbf{P}(k+1|k+1)$ 为状态更新MSE矩阵,并且在更新过程中使用Joseph形式求取 $\mathbf{P}(k+1|k+1)$ 以保证其正定性。

此外,进一步分析了设计的滤波器的计算复杂度。定义 n 为系统状态 $x(k)$ 的维数, n_d 为执行器扰动 $d(k)$ 的维数, n_w 为系统噪声 $w(k)$ 的维数,以及 m 为传感器量测 $z(k)$ 的维数。然后可以得到线性化四元数卡尔曼滤波算法的计算复杂度

$$O(3n^3 + m^3 + 5n^2m + 3m^2n + n^2n_d + n^2n_w)$$

相较于标准的卡尔曼滤波器(尽管其不能应用到该任务中),本文中设计的卡尔曼滤波器并没有额外增加计算复杂度。因此,在有限星载计算条件下,设计的基于线性化四元数量测的卡尔曼滤波算法可以用于空间引力波探测航天器系统状态的高精度估计。

对滤波器进行初始化,即 $x(0) \sim \mathcal{N}(\bar{x}(0), \mathbf{P}(0))$,其中 $\bar{x}(0)$ 为引力波探测卫星系统初始状态的均值, $\mathbf{P}(0)$ 为其协方差。由于干扰噪声比较小,初始状态通常分布在均值附近,因此将系统位置和姿态相关的初始协方差分量设为 10^{-25} ,而速度和角速度相关的初始协方差分量设为 10^{-30} 。系统滤波器的初始化为: $\hat{x}(0|0) = \bar{x}(0)$, $\mathbf{P}(0|0) = \bar{\mathbf{P}}(0)$ 。至此完成了非线性量测滤波估计的设计研究。

4 仿真实验

设置仿真采样时间为 $T = 0.1$ s,仿真时长为 $N = 50\,000$ s。初始的卫星状态设置为 $x(0) = [0^T; 0; 3e^{-5}; 0; e^{-5}; 0; 0; 0; 3e^{-5}; 0^T]$, $\mathbf{P}_0 = e^{-25} \times \mathbf{I}$ 。建立MATLAB/Simulink仿真模型,对天基引力波系统进行状态估计与结果分析。在实验结果中,我们将滤波估计结果分别与真实值和测量值进行比较。为了便于比较分析,定义性能指标:平均量测误差、平均估计误差、误差减小率(Error Reduction Rate, ERR)。

$$\begin{cases} \bar{x}_m(k) = x(k) - x_m(k) \\ \bar{x}_e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \\ \bar{x}_m = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\bar{x}_m(k)| \\ \bar{x}_e = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\bar{x}_e(k)| \\ \text{ERR} = \frac{\bar{x}_m - \bar{x}_e}{\bar{x}_m} \times 100\% \end{cases} \quad (22)$$

其中: $x(k)$ 为真实值; $x_m(k)$ 为量测值; $\hat{x}(k)$ 为估计值;

\bar{x}_m 为测量平均误差; \bar{x}_e 为估计平均误差; ERR 主要表征滤波器估计误差相对于传感器测量误差的减小程度。

使用最大短时抖动指标衡量状态估计与量测的控制效果。最大短时抖动性能的计算式如下

$$J_T = \max \left(\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \tilde{x}^2(k)}, \dots, \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{k=1+i}^{T+i} \tilde{x}^2(k)} \right) \quad (23)$$

其中: $i = 0, 1, \dots, N - T$; T 为时间窗的大小; $\tilde{x}(k) = x_r(k) - r(k)$ 为控制误差; $x_r(k)$ 为 k 时刻的量测值或状态估计值; $r(k)$ 为 k 时刻的系统引导率; N 为总采样点数。通过最大短时抖动性能指标比较状态估计值与测量值在不同大小时间窗下的控制误差的最大 RMSE。

比对滤波前后控制误差的频谱分析滤波的性能。这里控制误差是指估计值/量测值减去引导率信号的误差, 即可表示为

$$\begin{cases} e_e(k) = \hat{x}(k) - r(k) \\ e_m(k) = x_m(k) - r(k) \end{cases} \quad (24)$$

其中: $\hat{x}(k)$ 为估计值; $x_m(k)$ 为量测值; $r(k)$ 为引导率信号; $e_e(k)$ 为使用估计值时的控制误差; $e_m(k)$ 为使用量测值时的控制误差。使用 Welch 加权交叠平均法得到相应的渐进无偏的误差频谱。通过比对使用估计值和量测值的控制误差频谱, 可以看出使用估计值对于控制误差的影响。

从图 1 所示的状态仿真结果可以看出状态估计方案抑制了多源复杂噪声的影响, 实现了非线性量测下卫星位姿的实时估计。与系统传感器的量测值相比, 估计值更为平滑且精确地跟踪到卫星的真实状态。从图 2 所示的结果可以更直观地看出估计误差明显小于量测误差的波动范围, 在数值上更接近 0。从表 1 可以看出单个测试质量的位姿以及卫星的三维姿态的估计结果误差都小于量测结果误差, 姿态的估计误差成功降低了一个数量级, 且非线性量测的卫星姿态估计结果的误差减小率 ERR 均达到了 45% 及以上, 因此基于非线性量测线性化设计的卡尔曼滤波器可以得到更高精度的卫星状态, 估计结果代替测量结果为整个系统中

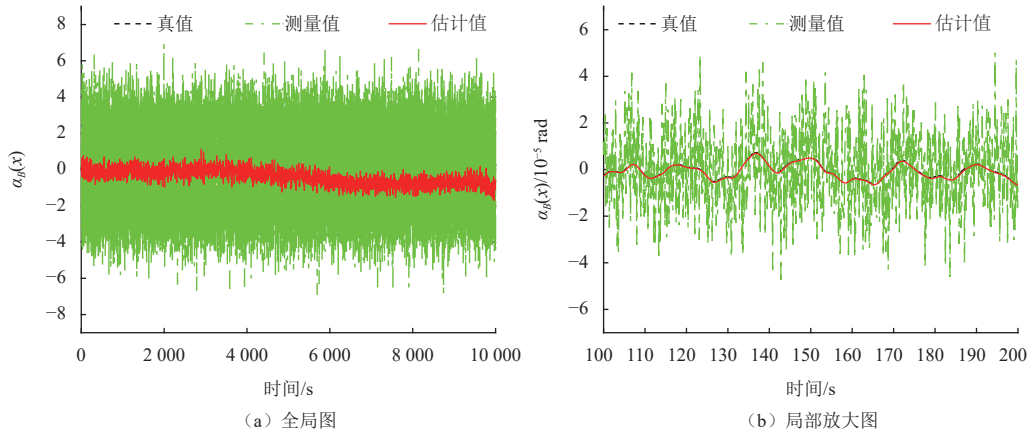


图 1 $\alpha_B(x)$ 状态仿真结果图
Fig. 1 $\alpha_B(x)$ State simulation results

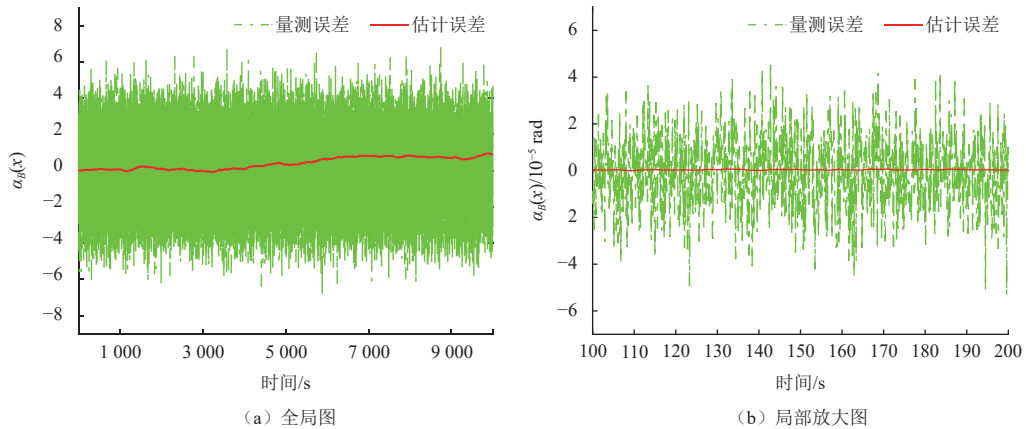


图 2 $\alpha_B(x)$ 估计误差对比图
Fig. 2 $\alpha_B(x)$ Estimation error comparison

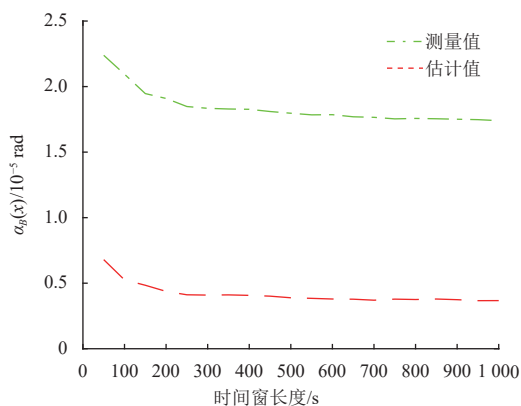
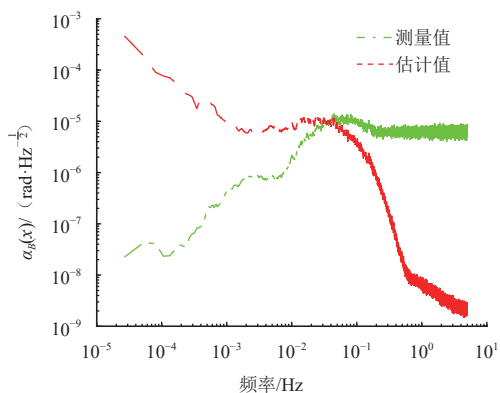
控制器模块提供更高精度的卫星实时状态信息。通过计算卫星姿态估计值与量测值的最大短时抖动来衡量系统控制误差的RMSE性能。从图3可以看出,在时间窗长度内卫星姿态角度估计值的最大短时扰动指标均小于量测值的最大短时扰动指标。同时通过控制误差

频谱图反映状态估计对系统控制误差的影响。从图4可以看出,使用状态估计值的控制误差频谱相较于量测值在高频处幅值显著衰减,在高频处其控制误差的方差更小。因此使用基于非线性量测线性化设计的卡尔曼滤波器使得系统有更好的控制性能。

表1 状态估计性能比较

Table 1 Performance comparison of state estimation

状态	$r_1(x)/m$	$r_1(y)/m$	$r_1(z)/m$	$\alpha_1(x)/rad$	$\alpha_1(y)/rad$	$\alpha_1(z)/rad$	$\alpha_B(x)/rad$	$\alpha_B(y)/rad$	$\alpha_B(z)/rad$
\bar{x}_m	3.6713×10^{-6}	5.6591×10^{-6}	5.4764×10^{-6}	3.6159×10^{-6}	5.4012×10^{-6}	5.5476×10^{-6}	1.2852×10^{-5}	1.2818×10^{-5}	1.2838×10^{-5}
\bar{x}_e	2.6343×10^{-6}	4.0990×10^{-6}	2.4968×10^{-6}	2.2749×10^{-6}	3.1621×10^{-6}	4.1519×10^{-6}	6.5475×10^{-6}	6.5331×10^{-6}	4.6026×10^{-6}
Err/%	28.24	27.57	54.41	37.09%	43.00	60.77	49.06	49.03	64.15

图3 $\alpha_B(x)$ 最大短时抖动Fig. 3 $\alpha_B(x)$ Maximum short-time jitter图4 $\alpha_B(x)$ 滤波前后控制误差频谱Fig. 4 $\alpha_B(x)$ Control error spectrum

5 结论

本文针对空间引力波探测卫星对准阶段状态实时估计任务,基于星敏感器和惯性传感器等多源异构信息设计了一种线性化四元数量测的高性能状态估计器。首先对系统动力学模型进行离散时间状态空间建模;其次利用参考四元数信息对星敏感器非线性量测模型线性化处理,提出了基于卡尔曼滤波器的高性能

状态估计算法,从而实现空间引力波探测航天器系统状态的在轨高精度估计;最后建立MATLAB/Simulink闭环仿真系统。仿真结果表明,在保证较低计算复杂度的前提下,所设计的估计方法能够达到很好的估计效果,满足引力波探测任务中航天器状态高精度实时估计的需要,进一步验证了提出的状态估计器的可行性。

参 考 文 献

- [1] 胡越欣,张立华,高永,等. 空间引力波探测航天器关键技术分析[J]. 航天器工程,2022,31(4):1-7.
HU Y X,ZHANG L H,GAO Y, et al. Analysis of key technologies of spacecraft for gravitational waves detection in space[J]. *Spacecraft Engineering*, 2022, 31(4): 1-7.
- [2] 罗子人,白姍,边星,等. 空间激光干涉引力波探测[J]. 力学进展, 2013,43(4):415-447.
LUO Z R,BAI S,BIAN X, et al. Space-based gravitational waves detection spacecraft by laser interferometry[J]. *Advances In Mechanics*, 2013, 43(4): 415-447.
- [3] 罗俊,艾凌皓,艾艳丽,等. 天琴计划简介[J]. 中山大学学报(自然科学版),2021,60(Z1):1-19.
LUO J,AI L H,AI Y L, et al. A brief introduction to the TianQin project[J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2021, 60(Z1): 1-19.
- [4] CIRILLO F. Controller design for the acquisition phase of the LISA mission using a Kalman filter [D]. Pisa: University of Pisa, 2007.
- [5] STEPHEN M M. LISA technology status summary: LISAMSE-RP-0001[R]. Paris: ESA, 2009.
- [6] GATH P, FICHTER W, KERSTEN M, et al. Drag free and attitude control system design for the LISA pathfinder mission [C]//Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit. Providence, Rhode Island, USA: AIAA, 2004.
- [7] FICHTER W, GATH P, VITALE S, et al. LISA pathfinder drag-free control and system implications[J]. *Classical & Quantum Gravity*, 2005, 22(10): S139.
- [8] 吕振铎,雷拥军. 卫星姿态测量与确定[M]. 北京:国防工业出版社, 2013.
- [9] 周海银,王炯琦,潘晓刚,等. 卫星状态融合估计理论与方法[M]. 北京:科学出版社,2013.
- [10] 王炯琦,矫媛媛,周海银,等. 复杂卫星抖动下的星敏感器姿态测量

- 数据处理技术[J]. 电子与信息学报, 2010, 32(8): 1-7.
- WANG J Q, JIAO Y Y, ZHOU Y H, et al. Star sensor attitude measuring data processing technique in condition of complex satellite dithering[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2010, 32(8): 1-7.
- [11] SHUSTER M D, OH S D. Three-axis attitude determination from vector observations[J]. *Journal of Guidance and Control*, 1981, 4(1): 70-77.
- [12] MARKLEY F L. Attitude determination using vector observations and the singular value decomposition[J]. Journal of the Astronautical Sciences, 1987, 38(3): 245-258.
- [13] DANIELE M. Euler-q Algorithm for attitude determination from vector observations[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1998, 21(2): 328-334.
- [14] SHUSTER M D. Kalman filtering of spacecraft attitude and the QUEST model[J]. Journal of the Astronautical Sciences, 1990, 38(3): 377-393.
- [15] KALMAN R E. A new approach to linear filtering and prediction problems[J]. Journal of Fluids Engineering, 1959, 82D: 35-45.
- [16] LEFFERTS E J, MARKLEY F L, SHUSTER M D. Kalman filtering for spacecraft attitude estimation[J]. Journal of Guidance Control Dynamics, 1982, 5(5): 536-542.
- [17] 廖鹤, 王本利, 曹正礼. 用于无陀螺卫星姿态确定的预测UKF算法[J]. 南京理工大学学报(自然科学版), 2011, 35(5): 687-692.
- LIAO H, WANG B L, CAO Z L. Predictive unscented Kalman filter for gyroless satellite attitude determination[J]. Journal of Nanjing University of Science and Technology, 2011, 35(5): 687-692.
- [18] CRASSIDIS J L, MARKLEY F L, CHENG Y. Survey of nonlinear attitude estimation methods[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2007, 30(1): 12-28.
- [19] GORDON N J. Novel approach to non-linear/non-Gaussian Bayesian state estimation [J]. IEE Proceedings F (Radar and Signal Processing), 1993, 140(2): 107-113.
- [20] NARGAARD M, POULSEN N K, RAVN O. New developments in state estimation for nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2000, 36(11): 1627-1638.
- [21] 魏喜庆, 宋申民. 基于容积卡尔曼滤波的卫星姿态估计[J]. 宇航学报, 2013, 34(2): 193-200.
- WEI S X, SONG S M. Cubature Kalman filter-based satellite attitude estimation[J]. Journal of Astronautics, 2013, 34(2): 193-200.

作者简介:

张东林(1994-), 男, 博士生, 主要研究方向: 姿态估计、多传感器融合、非线性滤波。

通信地址: 陕西省西安市咸宁西路28号西安交通大学电信学部(710049)

电话: 18792856220

E-mail: zdlin23@stu.xjtu.edu.cn

段战胜(1977-), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向: 状态估计; 多传感器信息融合; 目标定位、跟踪与识别。**本文通信作者。**

通信地址: 陕西省西安市咸宁西路28号西安交通大学电信学部(710049)

电话: (029)82663420

E-mail: zsduan@mail.xjtu.edu.cn

High Precision State Estimation Method Design for Space-Based Gravitational Wave Detection Spacecraft

ZHANG Donglin¹, CAO Yifan¹, DUAN Zhansheng¹, WANG Pengcheng²,
GUO Ming², ZHANG Yonghe²

(1. School of Automation Science and Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. Innovation Academy for Microsatellites of Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201204, China)

Abstract: Based on multi-sensor data from star sensors and inertial sensors, a high-performance Kalman filtering algorithm with linearized quaternion measurements was proposed in this paper. According to the ultra-stable and ultra-static platform characteristics of the task, new pseudo-linear measurements were constructed by an approximate transformation for quaternion measurements under small angle change of the spacecraft so that the linear assumption of Kalman filtering was satisfied. Combined with the discrete-time state space model of spacecraft system and the multi-sensor measurements, a Kalman filtering algorithm with linearized quaternion measurements was designed, to achieve high-precision in-orbit state estimation of spacecraft system. The simulation experiments are provided to demonstrate the effectiveness of the proposed Kalman filtering algorithm, which meets the precision requirement of spacecraft attitude estimation for space-based gravitational waves detection and provides the high-precision observation for spacecraft attitude control.

Keywords: gravitational wave detection; nonlinear measurements; Kalman filtering

Highlights:

- For the high-precision state estimation task of space gravitational wave detection spacecraft system, it is difficult for the state information measured by star-sensitive and inertial sensors to achieve the accuracy required by the system. In this paper, a high-performance state estimation algorithm with linearized quaternions is designed based on Kalman filtering.
- The error reduction rate (ERR) of spacecraft state estimation is more than 45%.
- Compared with sensor measurements, the designed state estimation algorithm can obtain more accurate state information of spacecraft.

[责任编辑: 宋宏, 英文审校: 宋利辉]